

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

**ANÁLISE ASSINTÓTICA DE SOLUÇÕES DE
EQUAÇÕES DIFUSIVAS NÃO-LINEARES
VIA MÉTODOS DE ESCALAS MÚLTIPLAS**

Leonardo Trivellato Rolla

Orientador: Gastão de Almeida Braga

20 DE SETEMBRO DE 2004

Dedico este trabalho

à minha mãe e aos meus irmãos,

meus maiores motivos de alegria.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq, pela bolsa de estudos.

As pessoas, são várias às quais devo agradecimentos. Peço desculpas a quem tenha sido omitido nesta página, por algum descuido meu. Agradeço:

a todos os meus verdadeiros amigos, pela cumplicidade incondicional e pela companhia agradável, mesmo que às vezes aparentemente separados pelo tempo, pela rotina ou pela distância;

aos demais alunos da pós-graduação, pelo coleguismo e pela prazerosa convivência no nosso querido “beco”. Em especial, aos colegas Alexandre, Ivana, Leandro e Rodrigo;

aos camaradas Bruno, Dalgiza, Eliana, Érico, José Raimundo, Leonardo e Marquinhos, e a todos aqueles que lutam pela construção de uma sociedade mais justa, pelo companheirismo e por me ajudarem a dar sentido prático à minha existência enquanto ser político e social;

aos Profs. Antônio Plascak, Carlos Isnard, Gastão Braga, Mário Jorge Caneiro, Márcio Soares, Suzana Fornari, Sylvie Kamphorst, Vladas Sidoravicius e Wagner Meira, por me mostrarem que não existe dicotomia entre pesquisar com excelência e lecionar com clareza, dedicação e entusiasmo;

à Profa. Sylvie Kamphorst, por todo o apoio, preocupação e atenção que sempre teve comigo, pelos incentivos e pelos vários conselhos dados durante nossas longas conversas, que jamais serão esquecidas;

à Jussara Moreira, pela colaboração nos trabalhos publicados e pela ajuda nos estudos analíticos;

ao Prof. Paulo Cupertino, pelos valiosos comentários durante os seminários de homogeneização;

ao Prof. Vincenzo Isaia, pelas várias discussões, em especial quanto à simulação do problema periódico;

ao Prof. Paulo César Carrião, por ter aceitado o convite para participar da banca e pelo cuidado matemático minucioso na leitura e crítica deste texto;

ao Prof. Luis Felipe Pereira, pelos ensinamentos durante minha estada no IPRJ, pela singular hospitalidade, por ter aceitado participar da banca e, principalmente, pelas sugestões e comentários que certamente contribuíram com a qualidade deste trabalho;

ao Prof. Frederico Furtado, pelos momentos de trabalho conjunto, com a seriedade e ao mesmo tempo o bom humor que lhe são peculiares. Pelas sugestões, críticas, comentários, incentivos e “palpites” dados nos últimos três anos, que sem dúvida alguma foram de enorme valia não só para esta dissertação como para a minha formação individual;

ao Prof. Gastão Braga, por ter transmitido, não apenas conhecimento, mas principalmente sabedoria, com sua paciência incomensurável e, por isso mesmo, com máxima eficácia. Pela dedicação, proteção, compreensão e altruísmo absolutamente atípicos em uma relação orientador-aluno. Enfim, agradeço por ter sido, nos últimos quatro anos, o melhor orientador que eu poderia esperar.

Abstract

In the present work we shall describe and apply the techniques of the Renormalization Group - based in data rescaling and operator renormalizing - and of Homogenization - that substitutes, in a certain limit, a periodically inhomogeneous medium by a homogeneous one - for the study of asymptotic behavior of solutions of PDE's.

One class of problems studied in this dissertation consists of nonlinear, diffusive differential equations with periodic coefficients, that supposedly model the diffusion in a heterogeneous medium. Our study of these problems involves arguments originated from the two techniques described above. This makes, in certain sense, a connection between both of them.

Another class of problems studied here consists of nonlinear, diffusive equations with time dependent coefficients, originated from montecarlo simulation of the asymptotic behavior of the averaged solutions of stochastic differential equations modeling the phenomenon of two-phase flow in porous media.

Using the Renormalization Group we shall classify the problems in accordance with their qualitative behavior. This classification will be verified numerically. We shall also study the curve of phase transition that separates asymptotic regimes predominantly linear and nonlinear. The main results presented in this work are given by a numerical version of the Renormalization Group, which will be described in detail in the body of this dissertation.

Resumo

Neste trabalho vamos descrever e aplicar as técnicas do Grupo de Renormalização - baseada em mudança de escalas e renormalização de operadores - e de Homogeneização - que substitui, num certo limite, um meio periodicamente não-homogêneo por um outro homogêneo - para o estudo do comportamento assintótico de soluções de EDP's.

Uma classe de problemas estudados nesta dissertação consiste em equações diferenciais difusivas não-lineares com coeficiente de difusão periódico, que supostamente modelam a difusão em um meio heterogêneo. O nosso estudo desses problemas envolve argumentos originados das duas técnicas descritas acima, fornecendo, em certo sentido, uma conexão entre ambas.

Outra classe de problemas estudados nesta dissertação consiste em equações difusivas não-lineares com coeficiente de difusão dependente do tempo, que têm sua motivação física dada pelo comportamento assintótico médio, com respeito a simulações estocásticas, do fenômeno de escoamento bifásico em meios porosos.

Utilizando o grupo de renormalização vamos classificar os problemas de acordo com seu comportamento qualitativo. Esse comportamento qualitativo será verificado numericamente. Vamos também estudar a curva de transição de fase entre os regimes assintóticos predominantemente linear e o não-linear. Os principais resultados apresentados neste trabalho são obtidos via uma versão numérica do grupo de renormalização, que será descrita em detalhes no corpo desta dissertação.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 9 |
| 1.1 | Auto-similaridade e universalidade | 9 |
| 1.2 | Problemas estudados | 11 |
| 1.3 | A técnica do grupo de renormalização | 13 |
| 1.4 | A técnica de homogeneização | 16 |
| 1.5 | O grupo de renormalização numérico | 18 |
| 1.6 | Considerações finais | 20 |
| 2 | O Grupo de Renormalização Formal e Analítico | 23 |
| 2.1 | A equação do calor e mudança de escalas | 24 |
| 2.2 | A transformação do grupo de renormalização | 26 |
| 2.3 | Renormalização das equações | 30 |
| 2.3.1 | Difusão com coeficiente periódico | 34 |
| 2.3.2 | Difusão com coeficiente dependente do tempo | 37 |
| 3 | O Grupo de Renormalização Numérico | 41 |
| 3.1 | Preliminares | 42 |
| 3.2 | O algoritmo | 44 |
| 3.3 | Implementação | 46 |
| 4 | Resultados Numéricos | 50 |
| 4.1 | Validação do método | 52 |
| 4.1.1 | Equação do calor | 52 |
| 4.1.2 | Equação de difusão não-linear | 58 |
| 4.1.3 | Equação de Barenblatt | 60 |
| 4.1.4 | Refinamento da malha | 62 |
| 4.2 | Difusão com coeficiente periódico | 64 |
| 4.2.1 | Homogeneização do coeficiente de difusão | 66 |
| 4.3 | Difusão dependente do tempo | 67 |
| 4.3.1 | Caso linear | 67 |
| 4.3.2 | Caso não-linear | 70 |
| 4.3.3 | Transição de fase | 72 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.3.4 | Correções logarítmicas sobre a curva crítica | 80 |
| 5 | Teoria de Homogeneização | 82 |
| 5.1 | Estudo de um problema unidimensional | 83 |
| 5.2 | Equações diferenciais com coeficientes periódicos | 88 |
| 5.2.1 | Espaços de Sobolev | 88 |
| 5.2.2 | Lema de Lax-Milgram | 94 |
| 5.2.3 | O problema periódico | 95 |
| 5.2.4 | Um problema periódico auxiliar | 97 |
| 5.2.5 | Homogeneização de equações parabólicas | 100 |
| 6 | Apêndices | 105 |
| 6.1 | A transformada de Fourier | 105 |
| 6.2 | O princípio do máximo | 107 |
| | Referências Bibliográficas | 109 |
| | Errata | 112 |

Capítulo 1

Introdução

1.1 Auto-similaridade e universalidade

A evolução no tempo de sistemas físicos fora do estado de equilíbrio é muitas vezes bem descrita por soluções de equações diferenciais parciais. Frequentemente é observado que, sob circunstâncias apropriadas (mas razoavelmente gerais), a evolução temporal de tais sistemas torna-se assintoticamente auto-similar¹. No contexto de EDP's, tal afirmação traduz-se no fato de a equação em questão ter soluções que se comportam como

$$u(x, t) \approx \frac{1}{t^\alpha} \phi\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad \text{quando } t \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

Ocorre muitas vezes que tal comportamento auto-similar possui um forte viés de *universalidade*: os expoentes α e β e a maioria dos aspectos da função $\phi(\cdot)$ independem do problema de valor inicial associado, isto é, independem dos dados iniciais (dentro de uma certa classe), dos parâmetros da equação ou até mesmo da sua forma.

A análise de comportamentos assintóticos auto-similares envolve um problema em escalas múltiplas. A palavra *escala* se refere à escolha de uma unidade de medida, tanto para a variável espacial x quanto para a variável temporal t . Estas escalas são interdependentes e em geral elas surgem de uma determinada simetria da EDP em questão – ou parte dela. Essa simetria consiste

¹O significado de “auto-similar” está relacionado com a invariância com respeito à ação de um certo grupo de simetria, como será explicado logo adiante.

no fato de que existem números reais α e β e uma função $\phi(\cdot)$ tais que a equação admita uma solução da forma

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} \phi\left(\frac{x}{t^\beta}\right). \quad (1.2)$$

Essas soluções são ditas *auto-similares* ou *invariantes por mudança de escala*. Uma função homogênea de grau $-\alpha$ é o exemplo mais simples de uma função auto-similar. De fato, considere a mudança de escala $t \rightarrow Lt$, onde L é um fator positivo, e considere o conjunto \mathcal{C} das funções $f(\cdot) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, defina, sobre \mathcal{C} , a operação de mudança de escalas $\tilde{f}(t) \equiv L^\alpha f(Lt)$. Se $y(t) \equiv At^{-\alpha}$, $t > 0$, então $y(t) \in \mathcal{C}$ e $\tilde{y}(t) = y(t)$, isto é, $y(t)$ é invariante pela mudança de escala em \mathcal{C} .

De forma análoga, assumindo a existência dos expoentes α e β em (1.2) e dados $L > 0$ e $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a mudança de escalas $u \mapsto v$ por

$$v(x, t) = L^\alpha u(L^\beta x, Lt). \quad (1.3)$$

Claramente, soluções da forma (1.2) são invariantes por esta mudança. Os expoentes α e β são ditos *expoentes críticos* e a função ϕ é chamada *função perfil*. Em alguns casos, a equação completa pode não ter tal simetria mas, sob certas condições, ela ainda é “assintoticamente” simétrica e a solução do problema de valor inicial se comporta, para tempos longos, como

$$u(x, t) \approx \frac{A}{t^\alpha} \phi\left(\frac{x}{t^\beta}\right). \quad (1.4)$$

O prefator A é supostamente não-nulo e pode depender da equação diferencial em questão (dos parâmetros e dos termos não-lineares interpretados como *perturbações*) e da condição inicial. Contudo, os expoentes críticos e a função perfil são, muitas vezes, *universais*, isto é, eles não dependem nem do dado inicial e nem das perturbações adicionadas à equação, desde que escolhidas dentro de uma classe adequada.

Definimos *classes de universalidade* como conjuntos de problemas que apresentam um mesmo comportamento assintótico. Comportamentos da forma (1.4) são completamente determinados por: expoente α , expoente β , função de perfil ϕ e prefator A . A classe de universalidade será definida em termos de α , β e ϕ .

Por exemplo, dizemos que duas condições iniciais estão na mesma classe de universalidade se as soluções dos respectivos problemas de valor inicial tiverem um comportamento assintótico da forma (1.4) com os mesmos expoentes α e β e mesma função de perfil ϕ .

Estendendo a noção de expoente crítico, diremos que α e β são *expoentes críticos* se u satisfizer

$$u(x, t) \approx \frac{A}{g_1(t)} \phi\left(\frac{x}{g_2(t)}\right), \quad (1.5)$$

onde g_1 e g_2 são funções positivas tais que $\frac{1}{\ln t} \ln g_1(t) \rightarrow \alpha$ e $\frac{1}{\ln t} \ln g_2(t) \rightarrow \beta$ quando $t \rightarrow \infty$. A relação (1.5) é mais precisamente formulada através da existência do limite

$$g_1(t) u(g_2(t) \cdot, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} A \phi(\cdot). \quad (1.6)$$

Essa definição engloba tanto o comportamento descrito por (1.4) como também outros casos de interesse, como, por exemplo,

$$u(x, t) \approx \frac{1}{(t \ln t)^\alpha} \phi\left(\frac{x}{t^\beta}\right). \quad (1.7)$$

1.2 Problemas estudados

Neste trabalho estaremos interessados em estudar o comportamento assintótico de soluções de problemas de valor inicial difusivos. Listamos abaixo os problemas de interesse.

Problema 1 (Difusão Não-Linear com Coeficiente Periódico)

$$\begin{cases} u_t = (1 + \mu g(x)) u_{xx} + \lambda F(u, u_x, u_{xx}) \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

onde g é contínua e periódica², $\mu \in \mathbb{R}$ é tal que $1 + \mu g(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ e F é uma perturbação. A condição inicial $f(x)$ é suave e de suporte compacto.

Se $\mu = 0$ temos a chamada *equação de difusão não-linear*. Em particular, se $F(u, u_x, u_{xx}) = -uu_x +$ perturbações de ordem superior, então a equação é conhecida como *equação de Burgers*

²Sem perda de generalidade, vamos assumir que g tem período 2π .

não-linear. Ainda, se a perturbação de ordem superior depender somente de u , isto é, se F for da forma $F(u, u_x, u_{xx}) = -uu_x + g(u)$, então a equação é dita de *reação-difusão-convecção*.

No caso geral ($\mu \neq 0$), temos um modelo aproximado para o fenômeno da difusão em um meio composto e condutor, caracterizado por uma estrutura microscópica periódica, além das não-linearidades mencionadas acima. Esse meio é *não-homogêneo*, pois o coeficiente de difusão $K(x) \equiv (1 + \mu g(x))$ não é constante com respeito à variável x .

Problema 2 (Difusão Não-Linear com Coeficiente Dependente do Tempo)

$$\begin{cases} u_t = K(t) u_{xx} + \lambda F(u, u_x, u_{xx}) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases},$$

onde

$$K(t) = t^p + o(t^p), \quad (1.8)$$

$p > 0$, $o(s)$ sendo uma ordem pequena de s , ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K(t)}{t^p} = 1$. A condição inicial $f(x)$ é suave e de suporte compacto.

Equações desse tipo, em que a difusividade cresce com o tempo, aparecem na descrição de certos escoamentos multifásicos em meios porosos. Entre estes se incluem escoamentos associados a processos de recuperação de hidrocarbonetos em reservatórios de petróleo, e de remediação e controle de poluição em aquíferos [25]. Nestes escoamentos, o campo de velocidades é proporcional ao gradiente de pressão, segundo a lei de Darcy, e o fator de proporcionalidade é uma propriedade geológica do meio poroso, denominada “permeabilidade” (recíproca da resistividade ao escoamento). Devido à sua grande variabilidade como função da posição no meio poroso, e à impossibilidade de uma caracterização precisa desta variabilidade, a permeabilidade é comumente modelada como uma função aleatória da posição (campo estocástico) [9]. Em consequência, as equações que descrevem o escoamento possuem coeficientes estocásticos e, portanto, suas soluções são estocásticas. Ou seja, previsões baseadas nestas equações são inerentemente estocásticas.

Nesse contexto, a equação acima descreve o escoamento esperado (médio, no sentido estatístico) na presença de heterogeneidades geológicas estocásticas [14, 15]. A difusividade crescente como

função do tempo resulta da ocorrência dessas heterogeneidades em todas as escalas de comprimento.

Em geral, o comportamento assintótico das soluções dos problemas descritos acima é auto-similar – isto é, da forma (1.4) – ou quase auto-similar, com uma correção logarítmica – isto é, da forma (1.7) – e possui características bastante interessantes. Enfatizamos algumas abaixo.

Os expoentes α e β são universais: independem da condição inicial f , da perturbação periódica μg , do coeficiente $K(t)$ e da perturbação não-linear F , desde que escolhidos dentre uma classe adequada (nesta classe, α e β dependem apenas do expoente p em (1.8)). A função de perfil ϕ também é universal dentro desta classe: no Problema 1 depende apenas da média harmônica do coeficiente de difusão, enquanto no Problema 2 depende apenas do expoente p .

No caso linear e homogêneo ($\mu = 0 = \lambda$ no Problema 1; $\lambda = 0$ no Problema 2), o prefator A é universal, dependendo apenas do que chamamos de *massa* do dado inicial f . Mais especificamente, temos $A = \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$, ou seja, A não depende de nenhum dos parâmetros da equação nem de detalhes em pequena escala do dado inicial f . No caso não-linear, este prefator não é universal: o que os teoremas ou os estudos numéricos fazem é mostrar a existência de algum A estritamente positivo para o qual vale o limite (1.6) ou, no máximo, determiná-lo.

1.3 A técnica do grupo de renormalização

A técnica que nos permite estudar os problemas aqui apresentados e vários outros semelhantes chama-se *a técnica do grupo de renormalização*, que daqui em diante chamaremos de RG ³. Do ponto de vista de Equações Diferenciais, a técnica foi desenvolvida no final dos anos 80 e início dos anos 90 por Goldenfeld e colaboradores (veja [16] e referências lá citadas), em sua versão formal, e por Bricmont et al. [7, 6], em sua versão rigorosa. A versão numérica foi introduzida por Chen e Goldenfeld [8].

A aplicação formal desta técnica constitui-se, grosso modo, dos seguintes passos. Primeiro,

³A sigla RG vem da expressão *Renormalization Group*, do inglês.

procuramos por uma solução da EDP que seja da forma (1.2). Se a EDP contém termos não-lineares, nós os ignoramos ou ignoramos parte deles e consideramos apenas a parte da equação que nos interessa. A suposição de que a equação possui solução da forma (1.2) é muito forte e leva à inevitável redução do grau de liberdade do problema. Isso significa que reduzimos a EDP a uma EDO, cuja incógnita é $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se formos capazes de encontrar tal solução teremos a solução auto-similar desejada. O próximo passo é descrever a *classe de universalidade* desta solução, ou seja, o conjunto de dados iniciais e perturbações para os quais o comportamento assintótico é ditado por esta solução auto-similar. Consideramos a mudança de escalas (1.3) e *renormalizamos* a equação diferencial em questão, bastando para isto obter a equação satisfeita por v . A parte do operador diferencial que consideramos ao encontrar a solução auto-similar deve ser invariante por esta renormalização, ao passo que as partes restantes, às quais chamamos de *perturbações*, em geral sofrem alterações. Classificam-se então, formalmente, as perturbações como *irrelevantes* no caso em que a sua contribuição no operador diferencial tende a se anular com os sucessivos processos de renormalização; como *marginais* as perturbações que permanecem invariantes ou assintoticamente invariantes pela renormalização; como *relevantes* as que tendem a crescer neste procedimento. Repetimos esta mudança de escalas acompanhada da renormalização da equação por várias vezes e esperamos verificar que, sob certas condições, essas iterações resultem em alguma convergência. Por isso, a técnica do Grupo de Renormalização é considerada uma *técnica em escalas múltiplas*.

A aplicação rigorosa do método segue uma idéia simples e elegante: ao invés de tomarmos o limite $t \rightarrow \infty$ de uma só vez, estabelecemos um procedimento iterativo em que o limite $t \rightarrow \infty$ é visto como a composição de um operador consigo mesmo um número infinito de vezes. Esse operador chama-se *transformação do grupo de renormalização* e a sua definição depende da equação em questão. Os pontos fixos da parte linear do operador são as soluções invariantes por escala. Determina-se então a *bacia de atração* de cada ponto fixo. Para condições iniciais dentro da bacia de atração, o fluxo do RG fornecerá então o comportamento para tempos longos. Resumindo, o procedimento se reduz aos seguintes passos: dada uma escala $L > 1$, integram-se as equações, evoluindo o dado inicial do tempo 1 ao tempo L^2 ; reescalonam-se a variável espacial x e a solução u por fatores de L (esses fatores dependem dos expoentes críticos); subtrai-se da

solução reescalada a contribuição vinda do ponto fixo, o resto supostamente é “irrelevante” e espera-se que seja contraído à medida que iterarmos esse procedimento; a solução reescalada é então utilizada como condição inicial para uma nova equação, similar à original, dita *equação renormalizada*; o procedimento é iterado até que o regime assintótico seja atingido.

Um exemplo da aplicação do RG analítico é o estudo para a versão homogênea do Problema 1, isto é, com $\mu = 0$. Bricmont et al. [7] mostraram que, para F da forma $F(u, u_x, u_{xx}) = u^a u_x^b u_{xx}^c$ e para expoentes a, b e c tais que $a + 2b + 3c - 3 > 0$, se a condição inicial f for suficientemente pequena então vale

$$u(x, t) \approx \frac{A}{\sqrt{t}} \phi_* \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right), \quad \text{quando } t \gg 1,$$

onde A é uma constante positiva e

$$\phi_*(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{4} \right). \quad (1.9)$$

O sentido do símbolo \approx acima é o de um limite da forma (1.6), mas o resultado acima é provado na topologia de um certo espaço de Banach cuja formulação exata não nos interessa neste momento. O que chama a atenção é o fato de que, dentro de um conjunto consideravelmente amplo, o teorema fornece um critério extremamente simples que classifica aquelas perturbações F que não modificam o comportamento assintótico da solução, em relação àquele da equação do calor (caso em que, além de $\mu = 0$, temos $\lambda = 0$). Fazendo

$$d_F \equiv a + 2b + 3c - 3,$$

Bricmont et al. [7] classificam as perturbações como *irrelevantes* se $d_F > 0$, *marginais* se $d_F = 0$ e *relevantes* se $d_F < 0$. O resultado ora mencionado será apresentado de forma precisa mais adiante (veja Teorema 2.7 no Capítulo 2). Observe também que o teorema nos diz que os expoentes críticos α e β valem $1/2$ e que a função perfil é a distribuição gaussiana, seja qual for a perturbação irrelevante adicionada à equação linear.

No Problema 2, a classificação formal das perturbações é semelhante à do Problema 1, mas no lugar de d_F temos

$$\eta_F = a + 2b + 3c - \frac{p+3}{p+1}. \quad (1.10)$$

Diremos que o termo não-linear é *irrelevante* se $\eta_F > 0$; *marginal* se $\eta_F = 0$; *relevante* se $\eta_F < 0$.

A primeira novidade deste problema é que qualquer $p > 0$ faz com que as perturbações da forma u^3 , uu_x e u_{xx} deixem de ser marginais para se tornarem irrelevantes (repare que $d_F = 0$ para essas três perturbações, ou seja, no caso do Problema 1 essas perturbações são marginais).

Usando as mesmas idéias introduzidas originalmente por Bricmont et al. [7], Braga et al. [3] provaram que as soluções do Problema 2 linear, isto é, com $\lambda = 0$, se comportam como

$$u(x, t) \approx \frac{A_f}{\sqrt{t^{p+1}}} \phi_p \left(\frac{x}{\sqrt{t^{p+1}}} \right), \quad \text{quando } t \gg 1, \quad (1.11)$$

onde

$$\phi_p(x) = \sqrt{\frac{p+1}{4\pi}} \exp \left(-\frac{p+1}{4} x^2 \right) \quad (1.12)$$

e $A_f = \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$ (veja o Teorema 2.11 no Capítulo 2).

Braga et al. [3] conjecturaram também que qualquer perturbação não-linear irrelevante (isto é, com $\eta_F > 0$) está na mesma classe de universalidade do problema linear, caracterizada pelos expoentes críticos $\alpha = \beta = (p+1)/2$ e pela distribuição gaussiana ϕ_p dada em (1.12) – veja, no Capítulo 2, a Conjectura 2.12.

1.4 A técnica de homogeneização

O Problema 1 foi apresentado como um modelo aproximado de um meio composto e condutor, caracterizado por uma estrutura microscópica periódica, ou seja, um meio *não-homogêneo* cujo coeficiente de difusão $K(x) = 1 + \mu g(x)$ é periódico de período 2π . É razoável supor que as variações locais de $K(x)$ não são perceptíveis se observarmos esse meio a uma escala $L \gg 2\pi$, de forma que, em grandes escalas, a heterogeneidade do meio seja cada vez menos perceptível, se aproximando de um meio homogêneo (isto é, com K constante). Por isso, quando nos concentramos apenas no termo $K(x)$ do Problema 1, temos um *problema em duas escalas*. A teoria de homogeneização [2, 20, 26] para o Problema 1 (com $\lambda = 0$, isto é, sem a parte não-linear) dá uma resposta rigorosa ao argumento heurístico aqui apresentado. Mais que isso, nos diz que a solução u se comporta como a solução de

$$\begin{cases} u_t = \sigma u_{xx} \\ u(x, 1) = f(x), \end{cases} \quad (1.13)$$

onde $\sigma = \langle K^{-1} \rangle^{-1}$, sendo que $\langle \cdot \rangle$ denota a média sobre o período de uma função periódica qualquer (essa notação será mantida em todo este texto).

A substituição de $K(x)$ pela sua média harmônica no caso unidimensional possui uma explicação heurística simples. Primeiro note que o coeficiente de difusão representa a facilidade de propagação (de calor, do local mais quente para o mais frio; de partículas, do local de maior para o de menor concentração; ou de cargas elétricas, do local de maior para o de menor potencial elétrico) enquanto sua recíproca representa dificuldade. Agora considere, por exemplo, um sistema elétrico constituído de diferentes condutores em série. Sabemos, da teoria elementar de circuitos elétricos [17], que se quisermos substituir esses condutores por outros idênticos entre si (isto é, com uma condutância *homogênea*), então o valor dessa condutância deve ser dado pela média harmônica das condutâncias originais. O mesmo fenômeno ocorre na difusão de calor: podemos imaginar o meio condutor não-homogêneo como sendo uma superposição em série de inúmeros condutores de espessura Δx e, se quisermos substituí-los por um condutor somente (ou vários com mesma espessura Δx e idênticos entre si), temos que considerar a média harmônica desses condutores infinitesimais.

No Capítulo 5 desta dissertação vamos estudar rigorosamente alguns problemas de homogeneização. Em particular, o Corolário 5.12 justifica a substituição de $K(x)$ por σ em (1.13).

A técnica de homogeneização foi desenvolvida para estudar o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais parciais com coeficientes periódicos. Problemas dessa natureza têm duas escalas de comprimento típicas: a escala do meio difusivo, associada ao período do coeficiente de difusão, e a escala de observação, associada ao ponto espacial e ao tempo no qual se fazem medidas experimentais. Por outro lado, a técnica do grupo de renormalização [6, 7, 16] foi desenvolvida para tratar problemas com um número infinito de escalas, como por exemplo a equação de difusão não-linear (Problema 1 com $\mu = 0$). Se substituirmos $K(x)$ por σ no Problema 1, podemos aplicar o teorema de Bricmont et al. [7] mencionado acima. Com esse argumento Braga et al. [4] conjecturaram que o mesmo resultado continua válido sem a hipótese de homogeneidade para o coeficiente de difusão ($\mu = 0$), exceto porque a função de perfil é *renormalizada*. Em outras palavras, se F pode ser escrita na forma $F(u, u_x, u_{xx}) = u^a u_x^b u_{xx}^c$, se

$d_F > 0$ e se λ é suficientemente pequeno, então

$$u(x, t) \approx \frac{A}{\sqrt{t}} \phi_\sigma \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right), \quad \text{quando } t \gg 1, \quad (1.14)$$

onde

$$\phi_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma}} \exp \left(-\frac{x^2}{4\sigma} \right). \quad (1.15)$$

Para uma formulação precisa de (1.14), veja a Conjectura 2.9 no Capítulo 2.

O termo $\mu g(x)$ tem representado um obstáculo para o estudo rigoroso do Problema 1 usando-se o grupo de renormalização analítico. Até onde sabemos, esta é a primeira vez em que se estabelece uma conexão entre a técnica de homogeneização e o grupo de renormalização para EDP's (no contexto de física estatística, veja o trabalho de Naddaf e Spencer [23]).

Duro e Zuazua [11] consideraram a equação

$$u_t - \operatorname{div}(a(\vec{x})\nabla u) = \vec{d} \cdot \nabla(|u|^{q-1}u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty),$$

onde $\vec{d} \in \mathbb{R}^N$ e $a(\vec{x})$ é uma matriz suave, simétrica, periódica e uniformemente elíptica. Usando a teoria de homogeneização eles provaram, dentre outros resultados, que a classe de universalidade do comportamento auto-similar da equação linear ($\vec{d} = 0$) inclui perturbações com $q > 1 + 1/N$. Apesar de não provarmos rigorosamente, nossos resultados numéricos indicam que o resultado de Duro e Zuazua deve continuar válido para outras perturbações não-lineares⁴.

1.5 O grupo de renormalização numérico

Partindo exatamente das mesmas idéias em que se baseiam o RG formal e o RG analítico, surge naturalmente uma versão numérica do mesmo procedimento, o chamado *grupo de renormalização numérico*, ou simplesmente *RG numérico*. Até onde sabemos, a primeira versão deste método foi proposta por Chen e Goldenfeld em 1995 [8]. O método numérico consiste, assim como no caso analítico, em evoluir a condição inicial segundo o fluxo dado pela EDP e depois fazer uma

⁴Chamamos atenção para uma sutil diferença entre a natureza das equações. O problema estudado por Duro e Zuazua, quando restrito ao caso unidimensional, inclui um termo da forma $(K(x)u_x)_x$ enquanto o problema que estudamos computacionalmente neste trabalho tem o termo da forma $(K(x)u_{xx})$.

mudança de escalas. A primeira vantagem do RG numérico, obviamente, é que não precisamos saber resolver a equação analiticamente ou restringir nossas hipóteses aos dados e parâmetros “suficientemente pequenos”, uma vez que a mesma será resolvida numericamente. Outra diferença está no cálculo dos expoentes α e β : no algoritmo numérico que vamos utilizar, os expoentes críticos são calculados dinamicamente, ao fim de cada iteração do algoritmo, mesmo que não sejam conhecidos *a priori*⁵. Por último, o RG numérico permite calcular prefatores nos casos em que os teoremas se limitam a garantir sua existência.

Nesta dissertação vamos apresentar a versão do RG numérico que foi implementada e utilizada nos trabalhos feitos em colaboração com G. Braga, F. Furtado e J. Moreira. Nesses trabalhos estudamos numericamente o comportamento assintótico de soluções dos problemas já apresentados e determinamos os expoentes críticos, pré-fatores e funções de perfil, assim como tentamos caracterizar suas classes de universalidade. Essa versão do RG numérico, que considera a renormalização das equações e permite o cálculo dos prefatores, além de uma malha discreta fixa, foi introduzida originalmente por G. Braga, F. Furtado e V. Isaia – veja a tese de doutorado de Isaia [19].

Os problemas estudados nesta dissertação são todos em apenas uma dimensão espacial. Ressaltamos, entretanto, que tal restrição não é, de forma alguma, uma restrição intrínseca ao método do grupo de renormalização numérico. Veja, novamente, a tese de doutorado de Isaia [19] para o estudo de problemas com mais dimensões espaciais.

Para o Problema 1, a verificação do comportamento assintótico (1.14), incluindo o estudo de um caso particular de perturbações relevantes, bem como a descrição e a validação do método numérico utilizado, foram publicados na revista *Multiscale Modeling and Simulation* [4], da SIAM.

Para o Problema 2, além de verificarmos o comportamento (1.11), fizemos o estudo do comportamento próximo da linha que separa perturbações relevantes e irrelevantes. Neste caso, nos

⁵Isso é particularmente útil no caso de equações cujos expoentes críticos não podem ser obtidos a partir de simetrias da EDP, como no caso da equação de Barenblatt. Neste caso dizemos que o problema possui *expoentes críticos anômalos*.

restringimos ao caso particular da perturbação não-linear

$$\lambda F = -u^a,$$

onde $a \in (1, \infty)$, e trabalhamos no espaço de parâmetros (p, a) . A condição para que o termo $-u^a$ seja marginal ($\eta_F = 0$) se reduz a

$$a = \frac{p+3}{p+1}, \tag{1.16}$$

cujo gráfico no plano (p, a) é o que chamamos de *curva crítica* (veja a Figura 4.19). Estudando numericamente o comportamento de soluções próximas a essa curva e analisando o expoente crítico α , verificamos que a mesma é de fato a interface entre as regiões relevante e irrelevante e dizemos que o sistema sofre uma *transição de fase* sobre esta curva. Estes resultados estão sendo redigidos na forma de artigo [3] a ser submetido para publicação.

Partes do conteúdo desta dissertação e da dissertação de mestrado de Moreira [22] estão também publicadas nas notas [5] do mini-curso oferecido no 57º Seminário Brasileiro de Análise.

Todos os casos aqui mencionados são discutidos no Capítulo 2 e os resultados numéricos são apresentados no Capítulo 4.

1.6 Considerações finais

Este trabalho está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 2 estudamos formalmente os Problemas 1 e 2 através do grupo de renormalização. Antes disso, as idéias e a motivação do método serão introduzidas para a equação do calor. No Capítulo 3 descrevemos uma versão numérica do grupo de renormalização. O método numérico consiste na integração da equação por um curto intervalo de tempo, seguido de um reescalonamento. O mesmo fornece um quadro detalhado do regime assintótico: função perfil, expoentes críticos, pré-fatores e parâmetros efetivos. O método é aplicável a problemas com soluções assintoticamente auto-similares, inclusive no caso crítico em que aparece correção logarítmica (decaimento com $(t \ln t)^\alpha$). O Capítulo 4 contém, principalmente, a verificação numérica das conjecturas e dos teoremas apresentados no Capítulo 2, com ênfase na verificação de (1.14) e (1.11), além da transição de fase em (1.16). No Capítulo 5 vamos

apresentar a teoria de homogeneização para equações lineares. Um dos objetivos é obter resultados rigorosos que justifiquem a substituição do coeficiente não-homogêneo por um homogêneo no estudo do Problema 1. Pretendemos apresentar ao leitor um texto auto-contido sobre a teoria de homogeneização, para equações elípticas e parabólicas lineares, em espaços de Sobolev. O leitor deve estar familiarizado com a Teoria de Medida e Integração de Lebesgue e, caso não tenha feito um curso de Análise Funcional, deverá ter um livro introdutório à mão (por exemplo, [10]) para buscar alguns conceitos e resultados básicos.

Listamos aqui alguns problemas que não são tratados neste texto para os quais acreditamos ser possível – e interessante – fazer um estudo numérico cuidadoso. Alguns deles chegaram a ser estudados pelo autor e colaboradores, mas não foram concluídos. No Problema 1 pode-se substituir o termo difusivo por um que seja conservativo, a saber, $u_t = (K(x)u_x)_x$. O estudo da equação $u_t = [K(x)(u^m)_x]_x$, motivada pela difusão em meios porosos não-homogêneos, é também de grande interesse; o autor desconhece qualquer estudo formal, numérico ou analítico acerca da homogeneização desta equação. Também o estudo da transição de fase no espaço de parâmetros (m, a) da equação $u_t = (u^m)_{xx} - u^a$ é um representante de todo um conjunto de problemas (em que se enquadra o Problema 2 desta dissertação) em que um parâmetro do termo difusivo determina o expoente crítico de decaimento e há uma competição entre o regime linear e não-linear, dando origem a uma transição de fase. Em todos os problemas em que ocorre essa transição de fase, mesmo que com apenas um parâmetro (como $u_t = u_{xx} - u^a$), o estudo numérico fino das correções logarítmicas que surgem nos pontos críticos é também questão interessante na opinião do autor. Em outra direção ortogonal, podemos pensar em adaptar as idéias do método para o estudo de equações (não necessariamente hiperbólicas) para as quais a solução se comporta assintoticamente como uma “onda viajante”. Para este último caso o autor chegou a implementar uma versão que forneceu resultados preliminares bastante satisfatórios. Por último, a formulação de um método mais geral, que seja apropriado para estudar problemas que apresentam decaimento, espalhamento e translação em seu comportamento assintótico, é questão de grande importância e alguns dos colaboradores do autor estão trabalhando nessa direção.

Por último, observamos que decidimos definir ϕ_* , ϕ_σ e ϕ_p por (1.9), (1.15) e (1.12), respectivamente, para manter o texto o mais limpo possível. Com esta notação, o sub-índice não é um

parâmetro propriamente dito; por exemplo, $\phi_* = \phi_\sigma = \phi_p$ se $\sigma = 1$ e $p = 0$; assim, não faz sentido escrever $\phi_{3,14}$.

Capítulo 2

O Grupo de Renormalização Formal e Analítico

Neste capítulo vamos estudar, usando o método do Grupo de Renormalização – RG, os problemas apresentados na Introdução. As idéias do método, assim como sua motivação, são introduzidas de forma natural para a equação do calor, devido às suas simetrias. Por essa razão a Seção 2.1 é dedicada ao estudo desta equação. Nessa seção nós introduzimos a operação por mudança de escalas e mostramos que a equação do calor tem uma solução simétrica com respeito a esta operação. Essa solução é utilizada para provarmos a Proposição 2.2, sobre o comportamento assintótico de soluções do problema de valor inicial associado.

Motivados pela operação de mudança de escalas, na Seção 2.2 nós definimos o operador RG. Vamos utilizar alguns resultados básicos sobre a transformada de Fourier aplicada à equação do calor. Nossa preocupação principal não está no preenchimento detalhado das definições e demonstrações, mas na idéia do RG como uma ferramenta para se provar teoremas a respeito do comportamento assintótico de soluções de equações difusivas. Por essa mesma razão, o leitor que não esteja familiarizado com esses resultados pode ler o texto sem se preocupar com tais detalhes. O nosso objetivo é apresentar uma outra prova da Proposição 2.2, utilizando, para isto, o reescalamento da solução do pvi iterativamente. Os ingredientes básicos para a realização desse procedimento são: a Propriedade de Semigrupo 2.3 e o Lema da Contração 2.4.

Na Seção 2.3, os Problemas 1 e 2 da Introdução serão considerados sob o ponto de vista formal

e heurístico. Observamos que a aplicação do método descrito acima depende fortemente da invariância da equação do calor por uma mudança de escalas. Contudo, em geral as equações não são invariantes sob este reescalonamento. Nesse caso, para analisar os Problemas 1 e 2 sob o ponto de vista do RG, nós consideraremos uma equação diferente em cada escala. Dizemos que a equação foi *renormalizada*. No processo de renormalização das equações, esperamos que fique latente a simplicidade e o poder da mudança de escalas: é possível determinar toda uma classe de perturbações não-lineares F , para as quais o comportamento assintótico das soluções continua sendo o mesmo da equação linear.

2.1 A equação do calor e mudança de escalas

Nesta seção vamos considerar o problema de valor inicial para a equação do calor:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(\cdot, 0) = f, & f \in C_0(\mathbb{R}), \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $C_0(\mathbb{R})$ é o conjunto das funções contínuas de suporte compacto em \mathbb{R} .

Enunciamos, a seguir, o teorema que nos garante a existência (global) e unicidade do pvi (2.1), como também nos fornece uma representação integral para a solução. Esse teorema pode ser formulado sob condições mais fracas, mas para os nossos propósitos é suficiente o caso em que o dado inicial seja contínuo de suporte compacto. A prova da proposição abaixo pode ser encontrada em [18].

Proposição 2.1 *O problema de valor inicial 2.1, com dado inicial $f \in C_0(\mathbb{R})$, possui uma única solução $u(\cdot, t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $t > 0$. Essa solução é dada pela fórmula*

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}} f(y) dy \quad (2.2)$$

para qualquer $t > 0$ e $u(x, t) \rightarrow f(x)$ quando $t \downarrow 0$.

Seja L um número real estritamente positivo e façamos a seguinte mudança de escalas:

$$x \mapsto Lx \quad t \mapsto L^2 t \quad u \mapsto Lu. \quad (2.3)$$

Chamemos de $v(x, t)$ à função $u(x, t)$ devidamente reescalada, isto é,

$$v(x, t) = Lu(Lx, L^2t). \quad (2.4)$$

Temos que $v_t = L^3u_s$ e $v_{xx} = L^3u_{yy}$, onde $s = L^2t$ e $y = Lx$, ou seja, $u_t = u_{xx}$ se e somente se $v_t = v_{xx}$. Dizemos que a equação do calor é *invariante pela mudança de escalas* (2.4), para qualquer $L > 0$.

Vamos procurar soluções que satisfaçam $u(x, t) = Lu(Lx, L^2t)$. Substituindo formalmente L por $1/\sqrt{t}$, temos $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} u(x/\sqrt{t}, 1)$, o que nos motiva a procurar soluções da forma

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \quad (2.5)$$

Qualquer função u que se escreve na forma (2.5) é obviamente invariante pela mudança de escalas (2.4). Para determinar a função $\phi(\cdot)$, nós substituímos (2.5) em (2.1), obtendo uma equação diferencial ordinária para $\phi(\xi)$:

$$0 = \phi'' + \frac{1}{2}\xi\phi' + \frac{1}{2}\phi = \left(\phi' + \frac{\xi\phi}{2}\right)'. \quad (2.6)$$

A equação acima admite soluções da forma $C \exp(-\xi^2/4)$ e, escolhendo a constante C de modo que $\int_{\mathbb{R}} \phi(\xi) d\xi = 1$, obtemos a distribuição gaussiana ϕ_* dada por (1.9). Substituindo ϕ por ϕ_* em (2.5), temos uma *solução invariante pela mudança de escalas*, que satisfaz a seguinte relação: $\sqrt{t} u(\sqrt{t} x, t) = \phi_*(x)$. A proposição abaixo mostra como essa relação está relacionada com o comportamento assintótico da solução geral.

Proposição 2.2 *Seja $u(x, t)$ a solução da equação do calor com dado inicial $f \in C_0(\mathbb{R})$. Então*

$$\sqrt{t} u(\sqrt{t} x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} A_f \phi_*(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

onde $A_f = \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$.

Prova: Substituindo x por $x\sqrt{t}$ e multiplicando (2.2) por \sqrt{t} , obtemos

$$\sqrt{t} u(\sqrt{t} x, t) - A_f \phi_*(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x\sqrt{t}-y)^2}{4t}} f(y) dy - \phi_*(x) \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{\frac{-(x\sqrt{t}-y)^2}{4t}} - \phi_*(x) \right) f(y) dy \quad (2.8)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \phi_*(x) \left(e^{\frac{2xy\sqrt{t}-y^2}{4t}} - 1 \right) f(y) dy. \quad (2.9)$$

Primeiro note que o integrando de (2.8) é dominado em módulo por $|f(y)|/\sqrt{\pi}$, que é integrável. Note também que o integrando de (2.9) converge a zero quando $t \rightarrow \infty$, isso para todo $y \in \mathbb{R}$ (podemos considerar x como um parâmetro fixo). Aplica-se o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para se obter (2.7). \square

2.2 A transformação do grupo de renormalização

O limite na Proposição 2.2 diz que soluções da equação do calor têm o comportamento assintótico ditado pela solução invariante por mudança de escalas. Vimos anteriormente que a equação do calor é invariante por essa mudança. Isso nos motiva a definir o operador do grupo de renormalização (veja [6, 7]). Esse operador age num espaço de funções, mais especificamente no espaço dos dados iniciais, e o mesmo consiste em evoluir, no tempo, o dado inicial $f(x)$, seguindo o fluxo dado pela equação do calor (essa evolução é realizada do tempo $t = 1$ ao tempo $t = L^2$) e, em seguida, mudamos a escala do domínio e do contra-domínio do dado evoluído. Denotando esse operador por R_L , onde $L > 1$ é o fator de escala¹, podemos descrever essa sequência de operações pelo diagrama:

$$f = u_f(\cdot, 1) \mapsto u_f(\cdot, L^2) \mapsto Lu_f(L\cdot, L^2) = R_L f, \quad (2.10)$$

onde u_f denota a solução da equação do calor com condição inicial $u(x, 1) = f(x)$. De outra forma:

$$(R_L f)(x) \equiv Lu_f(Lx, L^2). \quad (2.11)$$

É claro que R_L é um operador linear, uma vez que a equação do calor é linear e homogênea.

Vamos estudar como R_L atua conjugado com a transformada de Fourier (veja a definição e principais propriedades dessa transformada no Apêndice 6.1).

¹Daqui em diante vamos sempre assumir que $L > 1$.

No caso da equação do calor, para a qual já sabemos da existência e unicidade de uma solução global, a Propriedade de Semigrupo, que enunciamos e provamos abaixo, segue trivialmente da definição de R_L . Entretanto, vamos usar a transformada de Fourier para ilustrar um outro aspecto do RG analítico: podemos provar a existência da solução global do problema a partir da existência local.

Primeiramente, se u denota a única solução da equação do calor com condição inicial $u(\cdot, 0) = f$, e u_f denota a única solução com condição inicial $u_f(\cdot, 1) = f$, então temos

$$\hat{u}(k, t) = e^{-k^2 t} \hat{f}(k) \quad \text{e} \quad \hat{u}_f(k, t) = e^{-k^2(t-1)} \hat{f}(k). \quad (2.12)$$

Para uma prova deste fato, veja [18]. Aplicando (6.2) a (2.11), e substituindo (2.12), temos

$$\widehat{(R_L f)}(k) = (L \widehat{u_f(L \cdot, L^2)})(k) = \hat{u}_f(k/L, L^2) = e^{-(\frac{k}{L})^2(L^2-1)} \hat{f}(k/L). \quad (2.13)$$

Uma propriedade fundamental do operador R_L é a seguinte:

Teorema 2.3 (Propriedade de Semigrupo) *Sejam $L_1 > 1$ e $L_2 > 1$. Então*

$$R_{L_1} \circ R_{L_2} = R_{L_1 L_2}. \quad (2.14)$$

Prova: Basta desenvolver (2.13) para mostrar que $\widehat{(R_{L_1} R_{L_2} f)} = \widehat{(R_{L_1 L_2} f)}$ e o resultado segue, como vemos:

$$\begin{aligned} \widehat{(R_{L_1} R_{L_2} f)}(k) &= e^{-(k/L_1)^2(L_1^2-1)} \widehat{(R_{L_2} f)}(k/L_1) \\ &= e^{-(\frac{k}{L_1})^2(L_1^2-1)} e^{-(\frac{k}{L_1 L_2})^2(L_2^2-1)} \hat{f}(k/L_1 L_2) \\ &= e^{-k^2(1-\frac{1}{L_1^2})} e^{-k^2(\frac{1}{L_1^2} - \frac{1}{(L_1 L_2)^2})} \hat{f}(k/L_1 L_2) \\ &= \widehat{(R_{L_1 L_2} f)}(k). \end{aligned}$$

A prova está concluída. □

Também podemos “diagonalizar” o operador R_L , que tem os polinômios de Hermite com peso gaussiano como auto-vetores no espaço de Fourier.

A transformada de Fourier da gaussiana $\phi_*(x)$ dada por (1.9) é $\widehat{\phi}_*(k) = e^{-k^2}$. De (2.12) temos

$$\widehat{(R_L \phi_*)}(k) = e^{-k^2(1-\frac{1}{L^2})} e^{-\frac{k^2}{L^2}} = \widehat{\phi}_*(k), \quad (2.15)$$

ou seja, a distribuição gaussiana ϕ_* é um ponto fixo do RG. Da mesma forma, se $f_n(x)$ é a função cuja transformada de Fourier é $\widehat{f}_n(k) = k^n e^{-k^2}$ (esses são, essencialmente, os polinômios de Hermite com peso gaussiano), então f_n é um autovetor de R_L com autovalor $(1/L)^n$. Dizemos que a gaussiana $\phi_*(x)$ está na direção *marginal* e que os outros autovetores estão na direção *irrelevante*. O subespaço gerado pelos autovetores irrelevantes também é chamado de *variedade estável*.

Definimos o espaço \mathcal{B}_4 por

$$\mathcal{B}_4 = \left\{ f(x) \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f} \in C^1(\mathbb{R}) \text{ e } \|f\|_{\mathcal{B}_4} < +\infty \right\}, \text{ onde}$$

$$\|f\|_{\mathcal{B}_4} = \sup_{k \in \mathbb{R}} \left[(1 + k^4)(|\hat{f}(k)| + |\hat{f}'(k)|) \right].$$

Pode-se mostrar que \mathcal{B}_4 é um espaço de Banach, que os elementos de \mathcal{B}_4 são funções contínuas e que a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_4}$ domina as normas $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ e $L^\infty(\mathbb{R})$ (veja, por exemplo, a tese de mestrado de Moreira [22] ou as notas de mini-curso [5]).

Teorema 2.4 (Lema de Contração) *Se $f \in \mathcal{B}_4$ e $u(x, t)$ denota a solução da equação do calor tal que $u(\cdot, 0) = f$, então $u(\cdot, t) \in \mathcal{B}_4 \forall t > 0$. Em particular, $R_L \mathcal{B}_4 \subset \mathcal{B}_4$.*

Além disso, se $\hat{f}(0) = 0$, vale

$$\|R_L f\|_{\mathcal{B}_4} \leq \frac{C}{L} \|f\|_{\mathcal{B}_4},$$

onde $C = C(L) > 0$ é decrescente em relação a L e não depende de f .

Prova: Começaremos pela segunda parte. A equação do calor pode ser vista como um caso particular do Problema 2 com $p = \lambda = 0$ e $K(t) = 1$. A prova que apresentamos aqui é uma adaptação para este caso particular de uma prova mais geral – veja o Lema de Contração em [3]. A partir de (2.13) temos $\widehat{R_L f}(k) = e^{-(\frac{k}{L})^2(L^2-1)} \hat{f}(k/L)$ e $\widehat{R_L f}'(k) = -(L^2 - 1)(2k/L^2) e^{-(\frac{k}{L})^2(L^2-1)} \hat{f}(k/L) + L^{-1} e^{-(\frac{k}{L})^2(L^2-1)} \hat{f}'(k/L)$. Logo, vale que

$$\frac{|\widehat{R_L f}(k)| + |\widehat{R_L f}'(k)|}{e^{-(\frac{k}{L})^2(L^2-1)}} \leq \left| \hat{f}(k/L) \right| + \left| 2k \hat{f}(k/L) \right| + \left| \frac{1}{L} \hat{f}'(k/L) \right|.$$

Valem as estimativas $\hat{f}'(k/L) \leq \|f\|_{\mathcal{B}_4}$ e

$$|\hat{f}(k/L)| = \left| \hat{f}(0) + \int_0^{k/L} \hat{f}'(s) ds \right| \leq \int_0^{|k/L|} \frac{\|f\|_{\mathcal{B}_4}}{1+s^4} ds \leq |k/L| \|f\|_{\mathcal{B}_4}, \quad (2.16)$$

uma vez que $\hat{f}(0) = 0$. Assim, temos

$$(1+k^4)(|\widehat{R_L f}(k)| + |\widehat{R_L f}'(k)|) \leq \frac{(1+k^4)(1+|k|+2|k^2|) e^{-(\frac{k}{L})^2(L^2-1)}}{L} \|f\|_{\mathcal{B}_4}.$$

Definindo C como

$$C(L) = \sup_{k \in \mathbb{R}} \left\{ (1+k^4)(1+|k|+2|k^2|) e^{-(\frac{k}{L})^2(L^2-1)} \right\} < +\infty, \quad L > 1,$$

temos que $\|R_L f\|_{\mathcal{B}_4} \leq \frac{C}{L} \|f\|_{\mathcal{B}_4}$. Além disso, $C(L)$ é positivo e decrescente, logo C/L é estritamente decrescente e $\lim_{L \rightarrow \infty} C/L = 0$.

A primeira parte pode ser mostrada de forma idêntica, exceto porque (2.16) não vale em geral, o que não é problema, pois a exponencial de (2.12) domina qualquer polinômio e com isso podemos mostrar que $u(\cdot, t) \in \mathcal{B}_4 \forall t > 0$. \square

Observação: Segue do Teorema 2.4 que existe $L_0 > 1$ tal que R_L é uma contração em $\{f \in \mathcal{B}_4 : \hat{f}(0) = 0\}$ para qualquer $L > L_0$.

Corolário 2.5 (Convergência) *Se $L > L_0$ e $f \in \mathcal{B}_4$ então*

$$R_L^n f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{B}_4} A_f \phi_*, \quad (2.17)$$

onde $A_f = \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$.

Prova: Defina $f_n = R_L^n f$ e $g_n = f_n - A_f \phi_*$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Pela linearidade de R_L e como $\phi_* = R_L \phi_*$, temos que $g_{n+1} = f_{n+1} - A_f \phi_* = R_L f_n - R_L A_f \phi_* = R_L g_n$. É suficiente ver que $\hat{g}_n(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, pois, pelo Teorema 2.4 teremos $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{B}_4} 0$. Mas $\hat{g}_0(0) = \int_{\mathbb{R}} g_0(y) dy = \int_{\mathbb{R}} (f - A_f \phi_*)(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) dy - A_f \int_{\mathbb{R}} \phi_*(y) dy = 0$. Seja $n \geq 0$ e suponha que $\hat{g}_n(0) = 0$, temos, por (2.13), que $\widehat{g_{n+1}}(0) = \widehat{R_L g_n}(0) = 0$, o que, por indução, conclui esta prova. \square

O corolário abaixo traz um resultado similar à Proposição 2.2:

Corolário 2.6 *Seja $u(x, t)$ a solução da equação do calor com dado inicial $u(\cdot, 0) = f \in \mathcal{B}_4$. Então vale*

$$\sqrt{t_n} u(\sqrt{t_n} x, t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{B}_4} A_f \phi_*(x) \quad (2.18)$$

para qualquer seqüência $t_n = L^{2n}$ com $L > L_0$, onde $A_f = \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$. Em particular, temos convergência uniforme e convergência nas topologias de $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$.

Prova: Como a equação que estamos considerando tem sua condição inicial no tempo $t = 0$ e o grupo de renormalização foi definido para soluções com condição inicial em $t = 1$, definimos a função g como $g = u(\cdot, 1)$. Segue de (2.12) que $\hat{g}(0) = \hat{f}(0)$ e, portanto, $\int_{\mathbb{R}} g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) dy = A_f$.

Agora, veja que da *Propriedade de Semigrupo* obtém-se $R_L^n = R_{L^n}$ e, pela definição de R_L (2.11), temos

$$R_L^n g(x) = R_{L^n} g(x) = L^n u(L^n x, L^{2n})$$

Segue do Corolário 2.5 que

$$L^n u(L^n x, L^{2n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{B}_4} A_f \phi_*(x),$$

concluindo a demonstração. □

Observação: O limite pode ser mostrado para $t \rightarrow \infty$ em geral, preenchendo-se os intervalos $[L^{2n}, L^{2n+2}]$. Entretanto, esse último passo foge ao objetivo desta dissertação, pois é uma parte mais técnica e que ilustra pouco da utilidade do RG. Além disso, estamos considerando sistemas cujas soluções são “bem comportadas” e é pouco razoável a possibilidade de tal limite valer para toda subsequência da forma acima mas não valer para $t \rightarrow \infty$ em geral. Por último, no algoritmo numérico que vamos utilizar neste trabalho, somente essas subsequências serão consideradas. O leitor interessado pode consultar [3, 5, 6, 7, 22].

2.3 Renormalização das equações

Na seção anterior definimos o grupo de renormalização motivados pelo fato de a equação do calor ser invariante pela mudança de escalas (2.4). O que está por trás do fato de o método determinar

o comportamento assintótico do pvi é a Propriedade de Semigrupo (para a equação do calor, veja como a demonstração do Corolário 2.6 utiliza o Teorema 2.3). Na verdade, a transformação do RG aplicada à equação do calor é um caso particular da aplicação desse método. No caso mais geral (veja [6, 7]), a equação dada não é necessariamente invariante pela ação das operações (2.3). Por isso temos que ampliar o conceito do RG, fazendo o mesmo agir também sobre a equação diferencial dada. O que se faz é definir a solução reescalada v como em (2.4) e considerar a equação satisfeita por v . Assim, o esquema para o caso geral é:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{eq}_0 & \mapsto & \text{eq}_1 & \mapsto & \text{eq}_2 & \mapsto \cdots \mapsto & \text{eq}_n \mapsto \cdots, \\ f_0 & & f_1 & & f_2 & & f_n \end{array} \quad (2.19)$$

onde o n -ésimo mapeamento evolui o n -ésimo dado inicial f_n pela n -ésima equação eq_n , com $n = 0, 1, 2, \dots$. Portanto a transformação do grupo de renormalização terá, no caso geral, duas componentes: uma atuando sobre o espaço dos dados iniciais e a outra atuando sobre a equação diferencial em questão. Com isso mantemos a propriedade de semigrupo, fato essencial para que possamos fazer a evolução temporal do dado inicial usando o RG.

Seja $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}, t \geq 1$, solução global² de um dos dois problemas apresentados no Capítulo 1. Ao invés de tomarmos o limite (1.6) de uma só vez, o mesmo será fruto de um processo iterativo. Para um $L > 1$ fixo e expoentes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, definimos³ uma seqüência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções, por $u_0 = u$ e, para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$u_n(x, t) = L^{2\alpha} u_{n-1}(L^{2\beta} x, L^2 t). \quad (2.20)$$

Diremos que (u_n) é uma *seqüência de soluções reescaladas*. A partir da definição (2.20) e sabendo-se qual equação diferencial é satisfeita por u_{n-1} , é um exercício simples de cálculo obter a equação diferencial satisfeita por u_n . A estas equações chamaremos *seqüência de equações renormalizadas*.

Vamos definir f_n por

$$f_n(x) = u_n(x, 1). \quad (2.21)$$

²Não estamos preocupados neste momento com a questão da existência global de tal solução, mas simplesmente assumindo este fato.

³A forma mais “correta” seria definir $u_n(x, t) = L^\alpha u_{n-1}(L^\beta x, Lt)$. A substituição de L por L^2 neste capítulo pode ser vista como uma questão simplesmente estética. O RG numérico, que veremos no Capítulo 3, utiliza L como fator de escala ao invés de L^2 .

Segue de (2.21) e (2.20) que

$$f_n(x) = L^{2\alpha} u_{n-1}(L^{2\beta} x, L^2). \quad (2.22)$$

Observe que f_{n+1} pode ser obtida evoluindo-se f_n de $t = 1$ até $t = L^2$, de acordo com o fluxo que determina $u_n(\cdot, t)$, e aplicando-se as mudanças de escalas $x \mapsto L^{2\beta} x$, $u \mapsto L^{2\alpha} u$. Observe também que uma consequência imediata de (2.20) é

$$f_n(x) = u_n(x, 1) = L^{2n\alpha} u(L^{2n\beta} x, L^{2n}). \quad (2.23)$$

Ressaltamos a importância da relação acima. Suponha que, para o par de expoentes α e β dados, sejamos capazes de mostrar que $f_n \rightarrow \phi$, onde $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não é identicamente nula. Neste caso, teremos provado o limite (1.6) para a subsequência $t_n = L^{2n}$. Para provar o mesmo limite para qualquer sequência $t \rightarrow \infty$ de forma rigorosa, ficaria faltando então preencher os intervalos $[L^{2n}, L^{2n+2}]$ – veja a observação após o Corolário 2.6. Essa é, essencialmente, a forma com que a técnica do RG analítico é aplicada. A seguir, aplicaremos as idéias explicadas neste parágrafo para o problema de difusão não-linear. Os Problemas 1 e 2 serão considerados nas subseções seguintes.

Consideremos o problema de difusão não-linear (Problema 1 com $\mu = 0$). Vamos assumir que a perturbação é da forma $F = u^a u_x^b u_{xx}^c$. Se u é solução global do problema, então a n -ésima equação renormalizada será aquela satisfeita por u_n definida em (2.20), dada por

$$u_t = \chi_n u_{xx} + \lambda_n u^a u_x^b u_{xx}^c, \quad (2.24)$$

onde

$$\chi_n = (L^{1-2\beta})^{2n} \quad \text{e} \quad \lambda_n = (L^{1-(b+2c)\beta-(a+b+c-1)\alpha})^{2n} \lambda.$$

Se estamos interessados em caracterizar os problemas cujas soluções se comportem como no caso da equação do calor, esperamos algum tipo de convergência e por isso não é interessante que o termo χ_n tenda a 0 ou ∞ quando n cresce. Para isso, devemos ter $\beta = 1/2$. Como a equação do calor é conservativa⁴, devemos ter $\alpha = \beta$. Substituindo $\alpha = 1/2 = \beta$ temos que

$$\chi_n = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_n = (L^{-d_F})^n \lambda,$$

⁴Dizer que a equação é *conservativa* significa que suas soluções satisfazem $\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) dy \quad \forall t > 1$

de forma que a parte não-linear vai tender a se anular, permanecer constante, ou tender a infinito, se $d_F = a + 2b + 3c - 3$ for positivo, nulo ou negativo, respectivamente.

Ainda que não constitua uma prova rigorosa, o argumento acima permite classificar, mediante um exercício simples de derivação, uma gama de perturbações não-lineares da forma $F = u^a u_x^b u_{xx}^c$ que estão na mesma classe de universalidade⁵ da equação linear, caracterizada pelos expoentes críticos α e β .

Com essa abordagem, Bricmont et al. [7] provaram o teorema abaixo⁶.

Teorema 2.7 (Bricmont et al., 1994) *Considere o Problema 1 com $\mu = 0$ e condição inicial $u(\cdot, 0) = f \in \mathcal{B}_4$. Suponha que a perturbação F possa ser escrita na forma $F(u, u_x, u_{xx}) = u^a u_x^b u_{xx}^c$. Nessas condições, se $a + 2b + 3c - 3 > 0$ e λ é suficientemente pequeno, então existe $A \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\sqrt{t} u(\sqrt{t} x, t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{B}_4} A \phi_*(x),$$

onde u é a solução do problema de valor inicial e ϕ_* é definido em (1.9).

Em outras palavras, Bricmont et al. mostraram que u é assintoticamente auto-similar da forma

$$u(x, t) \approx \frac{A}{\sqrt{t}} \phi_* \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right).$$

Definição 2.8 (A transformação do grupo de renormalização) *Para $n = 0, 1, 2, \dots$, definimos o operador $R_{L,n}$ como*

$$R_{L,n} f = L u_f(L \cdot, L^2),$$

onde $u_f(x, t)$ denota a solução da n -ésima equação renormalizada (2.24) com condição inicial $u_f(x, 1) = f(x)$.

De acordo com a Definição 2.8 e de acordo com as equações (2.20), (2.21) e (2.22), temos que

$$f_{n+1}(x) = L u_n(Lx, L^2) = R_{L,n} f_n.$$

⁵Veja a discussão sobre classes de universalidade na Introdução, página 10.

⁶Um material acessível e minucioso em que estudam-se perturbações da forma $F = u^a$, $a = 4, 5, 6, \dots$, é a tese de mestrado de Moreira [22]. O resultado de Bricmont et al. é mais geral do que o Teorema 2.7 que enunciamos aqui.

Usando a identidade acima e denotando por R_L^n a composição $R_{L,n-1} \circ R_{L,n-2} \circ \cdots \circ R_{L,1} \circ R_{L,0}$, segue de (2.23) que

$$f_n(x) = L^n u(L^n x, L^{2n}) = R_{L^n,0} f(x) = R_L^n f(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.25)$$

ao que chamaremos de “propriedade de semigrupo”.

2.3.1 Difusão com coeficiente periódico

Considere o Problema 1 com $F = u^a u_x^b u_{xx}^c$. Seguindo o mesmo procedimento feito para a equação de difusão não-linear acima, temos que a n -ésima equação renormalizada será

$$u_t = \chi_n [1 + \mu g(\omega_n x)] u_{xx} + \lambda_n u^a u_x^b u_{xx}^c, \quad (2.26)$$

onde

$$\chi_n = (L^{1-2\beta})^{2n}, \quad \omega_n = (L^\beta)^{2n}, \quad \lambda_n = \lambda (L^{1-(b+2c)\beta-(a+b+c-1)\alpha})^{2n}.$$

Observe que estamos no mesmo caso da difusão não-linear exceto pela adição do termo $\mu g(x)$. No caso de $\mu = 0 \neq \lambda$, o Teorema 2.7 pode ser aplicado para garantir que

$$u(x, t) \approx \frac{A}{\sqrt{t}} \phi_* \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right). \quad (2.27)$$

Gostaríamos de entender como o termo $\mu g(x)$ afeta a classe de universalidade do comportamento assintótico auto-similar dado por (2.27). Para isso, é natural escolher novamente $\alpha = \beta = 1/2$. Nesse caso temos

$$\chi_n = 1, \quad \omega_n = L^n, \quad \lambda_n = \lambda (L^{-d_F})^n.$$

Consideremos, inicialmente, o Problema 1 supondo que $\mu \neq 0 = \lambda$ (equação linear com coeficiente de difusão periódico). Repare que, a cada renormalização, temos uma equação similar, porém com o termo $\mu g(x)$ oscilando cada vez mais rapidamente. A teoria de homogeneização, que estudaremos no Capítulo 5, nos diz que, para grandes escalas, as soluções desse problema – dito *não-homogêneo*, pois reflete as propriedades de um meio não-homogêneo – se aproximam da solução de uma equação com coeficiente constante, chamada *equação homogeneizada*. Nesse

caso, conforme a discussão feita no Capítulo 1 (e que será vista com mais detalhes no Capítulo 5), este coeficiente constante é dado pela média harmônica do coeficiente $1 + \mu g(x)$. Tome $\epsilon_n^{-1} = L^n$. Observando que $\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, vemos que o estudo do comportamento assintótico da solução desse problema é equivalente ao estudo, quando $\epsilon \rightarrow 0$, da solução da equação

$$u_t = [1 + \mu g(\epsilon^{-1}x)]u_{xx}.$$

De acordo com a teoria de homogeneização, a solução da equação acima se aproxima, quando $\epsilon \rightarrow 0$, de um múltiplo da solução de

$$u_t = \sigma u_{xx}, \quad (2.28)$$

onde $\sigma = \langle (1 + \mu g)^{-1} \rangle^{-1}$ é a média harmônica do coeficiente de difusão.

Consideremos, agora, o caso geral para o Problema 1, isto é, suponha agora que $\lambda \neq 0 \neq \mu$ (equação não-linear com coeficiente de difusão periódico). A equação renormalizada é dada por (2.26). Quando $n \rightarrow \infty$, o termo não-linear $\lambda_n F$ é supostamente levado a zero se $d_F > 0$, enquanto que o coeficiente periódico $1 + \mu g(\omega_n x)$ oscila cada vez mais rapidamente, produzindo um resultado cada vez mais parecido com o de um coeficiente constante $\sigma = \langle (1 + \mu g)^{-1} \rangle^{-1}$.

Somos então levados a supor que as soluções do Problema 1, dentro de uma classe de condições iniciais adequada e com F satisfazendo $d_F > 0$, se comportam assintoticamente como as soluções de (2.28). Fazendo a mudança de variáveis $x \mapsto x/\sqrt{\sigma}$, obtemos a equação do calor. Concluimos então que as soluções do Problema 1 se comportam da mesma forma que as soluções da equação de difusão não-linear, exceto pelo fator $\sqrt{\sigma}$ no argumento da função de perfil ϕ_* . Com esses argumentos, Braga et al. [4] estabeleceram e verificaram numericamente a conjectura abaixo.

Conjectura 2.9 (Braga et al., 2003) *Considere o Problema 1. Suponha que a perturbação F possa ser escrita na forma $F(u, u_x, u_{xx}) = u^a u_x^b u_{xx}^c$. Se a condição inicial é dada por $u(\cdot, 0) = f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $a + 2b + 3c - 3 > 0$ e λ é suficientemente pequeno, então existe uma única solução $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$. Além disso, existe $A \in \mathbb{R}$, tal que*

$$\sqrt{t}u(\sqrt{t}x, t) \rightarrow A\phi_\sigma(x) \quad \text{quando } t \rightarrow \infty,$$

onde ϕ_σ é definido em (1.15), o limite valendo em $L^1(\mathbb{R})$ e $L^\infty(\mathbb{R})$.

Em outras palavras, temos que u é assintoticamente auto-similar, da forma

$$u(x, t) \approx \frac{A}{\sqrt{t}} \phi_\sigma \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right),$$

com expoentes críticos $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ e função de perfil ϕ_σ .

Um caso de perturbação relevante

Para um caso particular de perturbações não-lineares relevantes, é possível ainda fazer o estudo do comportamento assintótico das soluções a partir da renormalização da equação.

Considere o Problema 1 com $\lambda F = -u^a$, $a \in (1, +\infty)$. O mesmo argumento que justifica a Conjectura 2.9 permite classificar as perturbações da forma acima como irrelevantes se $a > 3$. Pensemos agora no caso $a < 3$ e fixemos nossa atenção na parte não-linear do problema. A renormalização com $\alpha = 1/2$ faz esse termo crescer. Podemos pensar que isso se deve ao fato de que o termo não-linear produz um decaimento mais rápido do que $t^{-1/2}$ – as soluções de $u_t = -u^a$ são da forma $u = A\phi(x)t^{-1/(a-1)}$ com qualquer ϕ . Por outro lado, a parte linear não pode ser descartada pois ela é responsável pela difusão. Nesse caso, a renormalização correta é dada pelos expoentes $\beta = 1/2$, $\alpha = 1/(a-1)$. Essa escolha de β garante que a parte linear seja invariante pela renormalização. A escolha de α garante o mesmo para a parte não-linear. Essa nova escolha de expoentes determina um novo operador R_L e uma nova renormalização da equação. Em relação a essa nova renormalização, tanto u_{xx} quanto u^a são termos *marginais*.

Para o caso homogêneo ($\mu = 0$), pode-se seguir o mesmo raciocínio que nos levou à equação (2.6) para obter a equação a ser satisfeita pelo ponto fixo do novo RG. Essa equação possui uma solução ϕ_a positiva, de quadrado integrável, que é única a menos de uma constante multiplicativa – veja [7] e referências lá citadas. Bricmont et al. [7] provaram que se a condição inicial $u(\cdot, 0) = f$ satisfaz $f \in \mathcal{B}_4$ e $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, então

$$u(x, t) \approx \frac{A}{t^{\frac{1}{a-1}}} \phi_a \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right).$$

Para o caso em que $\mu \neq 0$, Braga et al. [4] verificaram numericamente a conjectura abaixo.

Conjectura 2.10 (Braga et al., 2003) *Considere o Problema 1 com condição inicial $u(\cdot, 0) = f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $f \geq 0$. Suponha que perturbação F possa ser escrita como $F(u) = u^a$ para $u \geq 0$ e que $\lambda < 0$. Se $a \in (1, 3)$ e λ é suficientemente pequeno, então existe uma única solução $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}, t > 1$. Além disso,*

$$t^{\frac{1}{a-1}}u(\sqrt{t}x, t) \rightarrow f_a\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma}}\right) \quad \text{quando } t \rightarrow \infty, \quad (2.29)$$

onde $\sigma = \langle (1 + \mu g(x))^{-1} \rangle^{-1}$ e f_a é uma função tal que

$$u(x, t) \equiv \frac{1}{t^{\frac{1}{a-1}}} f_a\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right)$$

é solução do problema com $\mu = 0$.

2.3.2 Difusão com coeficiente dependente do tempo

Considere o Problema 1 com $F = u^a u_x^b u_{xx}^c$. Reescrevemos a equação como:

$$u_t = [t^p + o(t^p)] u_{xx} + \lambda_n u^a u_x^b u_{xx}^c.$$

Neste caso, a n -ésima equação renormalizada é dada por

$$u_t = \chi_n \left[t^p + \frac{o(L^{np} t^p)}{L^{np}} \right] u_{xx} + \lambda_n u^a u_x^b u_{xx}^c, \quad (2.30)$$

onde

$$\chi_n = (L^{p+1-2\beta})^{2n}, \quad \lambda_n = \lambda (L^{1-(b+2c)\beta-(a+b+c-1)\alpha})^{2n}.$$

Fazendo $\beta = \alpha = \frac{p+1}{2}$, temos

$$\chi_n = 1, \quad \lambda_n = \lambda (L^{-(p+1)\eta_F})^n,$$

onde

$$\eta_F = a + 2b + 3c - \frac{p+3}{p+1}. \quad (2.31)$$

Observe que $\lim_{s \rightarrow \infty} o(s)/s = 0$ e, portanto,

$$\sup_{t \in [1, L^2]} \frac{o(L^{np} t^p)}{L^{np}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

de forma que, para grandes valores de n , este termo se torna desprezível na equação (2.30). Por outro lado, se $\eta_F > 0$, temos que λ_n decresce rapidamente a 0 quanto $n \rightarrow \infty$. Assim, somos levados a supor que o regime assintótico das soluções do Problema 2 com $\eta_F > 0$, e cuja condição inicial $u(\cdot, t) = f$ é suave e decai suficientemente rápido, está na mesma classe de universalidade da solução auto-similar de

$$u_t = t^p u_{xx}. \quad (2.32)$$

De fato,

$$u(x, t) = \frac{A}{t^\alpha} \phi_p \left(\frac{x}{t^\beta} \right),$$

onde $\alpha = \beta = \frac{p+1}{2}$ e ϕ_p é dada por (1.12) é uma solução auto-similar de (2.32).

Para o caso linear $\mu = 0$, Braga et. al [3] obtiveram o seguinte resultado.

Teorema 2.11 (Braga et al., 2004) *Considere o Problema 2 linear, isto é, com $\lambda = 0$. Se a condição inicial $u(\cdot, 0) = f \in \mathcal{B}_4$, então a solução $u(x, t)$ satisfaz*

$$\sqrt{t^{p+1}} u(\sqrt{t^{p+1}} \cdot, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{B}_4} A_f \phi_p(\cdot),$$

onde $\phi_p(x)$ é dada por (1.12) e $A_f = \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$.

Em outras palavras, u é assintoticamente auto-similar com expoentes $\alpha = \beta = \frac{p+1}{2}$, e o prefator A_f depende apenas da integral do dado inicial f .

Para o caso não-linear, Braga et al. propuseram a seguinte conjectura.

Conjectura 2.12 (Braga et al., 2004) *Considere o Problema 2 com $F = u^a u_x^b u_{xx}^c$ e defina η_F por (2.31). Então, se $\eta_F > 0$ e λ é suficientemente pequeno, continua valendo a conclusão do Teorema 2.11, substituindo-se A_f por uma constante A , que não depende apenas de f .*

Transição de fase

Considere a equação

$$u_t = t^p u_{xx} - u^a, \quad (2.33)$$

com espaço de parâmetros (p, a) .

Observe que a condição para que o termo $-u^a$ seja marginal, isto é, para que η_F dada por (2.31) se anule, se reduz a

$$a = a_c(p) = \frac{p+3}{p+1}. \quad (2.34)$$

Vamos analisar como o par de parâmetros (p, a) afeta o expoente crítico α .

Para $a > a_c(p)$ temos que o termo $-u^a$ é supostamente irrelevante pois tende a se anular sob a renormalização dada pelos expoentes $\alpha = \beta = (p+1)/2$. Nesse caso, o comportamento assintótico das soluções está na mesma classe de universalidade da equação linear e dizemos que estamos no *regime linear*.

Para $a < a_c(p)$, temos que o termo $-u^a$ tende a crescer com as sucessivas renormalizações se os expoentes forem escolhidos como no parágrafo acima. Nesse caso, a escolha correta dos expoentes é $\alpha = 1/(a-1)$ e $\beta = (p+1)/2$. O espalhamento com t^β é causado pelo termo $t^p u_{xx}$ e o decaimento com t^α é determinado por $-u^a$. O termo não-linear, que é considerado relevante, passa a ser marginal em relação a esses novos expoentes críticos. Nesse caso, dizemos que estamos no *regime não-linear*.

O caso $a = a_c(p)$ é o mais delicado. Ambos os termos linear e não-linear produzem o mesmo expoente crítico de decaimento $\alpha = \frac{p+1}{2} = \frac{1}{a-1}$. Nesse caso, dizemos que estamos no *regime crítico*. No regime crítico aparece uma correção logarítmica ao decaimento assintótico das soluções.

Podemos pensar que o termo determinante do expoente α será aquele que, sozinho, causaria o maior decaimento. Nesse caso, temos

$$\alpha(p, a) = \max \left\{ \frac{p+1}{2}, \frac{1}{a-1} \right\}. \quad (2.35)$$

Observe que a superfície dada pelo gráfico de $\alpha(p, a)$ tem suas singularidades justamente sobre a curva $a = a_c(p)$. A Figura 4.19 mostra o gráfico de $a_c(p)$ separando as regiões dos regimes linear e não-linear. A Figura 4.20 mostra o gráfico de $\alpha(p, a)$ com singularidades em $a = a_c(p)$.

Conjectura 2.13 (Braga et al., 2004) *Considere a equação (2.33) com $p \in [0, \infty)$ e $a \in$*

$(1, \infty)$, com condição inicial $u(\cdot, 0) = f$ satisfazendo $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. Então existe uma única solução $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$.

Se $a > a_c(p)$, então existe $A \geq 0$, que depende de p , a e f , tal que

$$\sqrt{t^{p+1}}u(\sqrt{t^{p+1}}\cdot, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{B}_4} A_f \phi_p(\cdot),$$

onde ϕ_p é dado por (1.12).

Se $a = a_c(p)$, então existe $A \geq 0$, que depende apenas de p , tal que

$$\sqrt{(t \ln t)^{p+1}}u(\sqrt{t^{p+1}}\cdot, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{B}_4} A_f \phi_p(\cdot).$$

Se $a < a_c(p)$, então existe $A > 0$, que depende apenas de a e p , e $\phi_{p,a} \in L^1(\mathbb{R})$ estritamente positiva tal que

$$t^{\frac{1}{a-1}}u(\sqrt{t^{p+1}}\cdot, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{B}_4} A_f \phi_{p,a}(\cdot).$$

No Capítulo 4 vamos fazer um estudo em torno do ponto $(p, a) = (1/2, 7/3)$, que está sobre a curva crítica (2.34). Verificamos, entre outras coisas, que este é de fato um ponto de transição de acordo com a Conjectura 2.13 acima. Em particular, vamos variar p e a separadamente e calcular o expoente α numericamente, verificando a fórmula (2.35).

Capítulo 3

O Grupo de Renormalização Numérico

Neste capítulo vamos descrever uma versão numérica do grupo de renormalização. O algoritmo, baseado nas idéias do RG analítico, é dotado de elegância e simplicidade que merecem destaque. Ademais, o método fornece um quadro detalhado do regime assintótico: função perfil, expoentes críticos, prefatores e parâmetros efetivos, sendo aplicável não só a problemas com soluções auto-similares (que decaem como $\approx t^{-\alpha}$), mas também ao caso crítico (ou marginal), em que aparecem correções logarítmicas ao decaimento $t^{-\alpha}$ (decaimento como $\approx (t \ln t)^{-\alpha}$).

Por tudo isso, o RG numérico parece ser a ferramenta ideal para estudar quais aspectos do comportamento assintótico são universais e quais dependem de parâmetros da EDP ou da condição inicial. O método também dá suporte a trabalhos rigorosos, pois os resultados obtidos podem encorajar tentativas de se provar teoremas ou, eventualmente, apontar para a necessidade de mudanças nas hipóteses.

Pelo que sabemos, a primeira versão numérica do RG para EDP's foi proposta por Chen e Goldenfeld [8]. Uma versão modificada foi introduzida por Braga, Furtado e Isaia, sendo bem mais rápida e eficiente que a primeira. Uma descrição detalhada desta versão pode ser encontrada na tese de doutorado de Isaia [19]. Infelizmente, parte do ganho computacional desta última não se aplica ao Problema 1, como veremos mais adiante.

O método aqui apresentado aplica-se a equações da forma

$$\begin{cases} u_t = G(u, u_x, u_{xx}, x, t) \\ u(x, 1) = f(x) \end{cases} . \quad (3.1)$$

Observamos que os problemas apresentados no capítulo introdutório e que serão estudados numericamente nesta dissertação podem ser escritos na forma acima.

A idéia de uma seqüência de mudanças de escalas e de renormalização de equações será generalizada para seqüências em que os expoentes de escala α e β podem ser diferentes em cada passo. Essa generalização será vista na Seção 3.1, juntamente outras noções preliminares de que vamos precisar para explicar o funcionamento do método. Cada iteração do método consiste basicamente nos seguintes passos: *evoluímos* uma dada função por um curto intervalo de tempo, segundo o fluxo dado pela equação (3.1); *mudamos as escalas* do domínio e do contra-domínio da função obtida; *renormalizamos* a equação (3.1). Esse algoritmo numérico será descrito na Seção 3.2. Outras decisões de implementação, como a discretização da equação, a escolha de uma escala L e a mudança de escalas no domínio da função serão discutidas na Seção 3.3. A validação do método numérico será feita no Capítulo 4.

3.1 Preliminares

Seja u_0 uma função real de $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Para um $L > 1$ fixo e seqüências de expoentes positivos $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, defina a seqüência de funções $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, indutivamente, pela seguinte *mudança de escalas*:

$$u_n(x, t) = L^{\alpha_n} u_{n-1}(L^{\beta_n} x, Lt) . \quad (3.2)$$

Repare que a definição (3.2) acima implica em

$$u_n(x, t) = L^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} u_0(L^{\beta_1 + \dots + \beta_n} x, L^n t) . \quad (3.3)$$

Daqui em diante vamos supor que a função original u_0 é solução global da Eq. (3.1) com $f = f_0$ e $G = G_0$, de forma que (u_n) seja uma *seqüência de soluções reescaladas*. Neste caso, u_n satisfaz

ao seguinte *problema de valor inicial renormalizado*:

$$\begin{cases} u_t = G_n(u, u_x, u_{xx}, x, t) \\ u(x, 1) = f_n(x) \end{cases}, \quad (3.4)$$

onde G_n e f_n são obtidos recursivamente, como explicamos a seguir.

Primeiramente, o operador G_n pode ser obtido a partir de G_{n-1} aplicando-se substituição de variáveis e a regra da cadeia

$$G_n(u, u_x, u_{xx}, x, t) = L^{\alpha_n+1} G_{n-1}(L^{-\alpha_n} u, L^{-\alpha_n-\beta_n} u_x, L^{-\alpha_n-2\beta_n} u_{xx}, L^{\beta_n} x, Lt). \quad (3.5)$$

Já a condição inicial f_n pode ser obtida a partir de f_{n-1} integrando-se a equação para u_{n-1} no intervalo de tempo $[1, L]$ e mudando-se as escalas do espaço e da própria função, pois, pela definição (3.2), temos

$$f_n(x) = L^{\alpha_n} u_{n-1}(L^{\beta_n} x, L).$$

Temos, dessa forma, uma *seqüência de equações renormalizadas*.

Queremos agora obter uma relação análoga à Propriedade de Semigrupo. Note que por (3.3) é possível relacionar f_n com a solução original:

$$f_n(x) = L^{\alpha_n+\dots+\alpha_1} u_0(L^{\beta_n+\dots+\beta_1} x, L^n). \quad (3.6)$$

Uma simples análise da equação (3.6) fornece a relação entre a dinâmica da seqüência (f_n) quando $n \rightarrow \infty$ e o comportamento assintótico de u_0 . Para isso, reescreva (3.6) como

$$u_0(x, L^n) = \frac{A_n}{L^{n\alpha_n}} f_n\left(B_n \frac{x}{L^{n\beta_n}}\right), \quad (3.7)$$

onde A_n e B_n são chamados de *prefatores* e podem ser calculados por

$$A_n = L^{n\alpha_n - (\alpha_n + \dots + \alpha_1)}, \quad B_n = L^{n\beta_n - (\beta_n + \dots + \beta_1)}. \quad (3.8)$$

Assim, se os limites $A_n \rightarrow A$, $B_n \rightarrow B$, $\alpha_n \rightarrow \alpha$, $\beta_n \rightarrow \beta$ e $f_n \rightarrow \phi$ são obtidos quando $n \rightarrow \infty$, podemos esperar que

$$L^{n\alpha} u_0(L^{n\beta} x, L^n) = \frac{A_n}{L^{n(\alpha_n - \alpha)}} f_n\left(B_n \frac{x}{L^{n(\beta_n - \beta)}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A\phi(Bx).$$

O limite acima, por sua vez, estabelece a auto-similaridade do comportamento assintótico de u_0 .

3.2 O algoritmo

A partir das definições preliminares, podemos sistematizar um método construtivo para a obtenção das seqüências (α_n) , (β_n) , (A_n) , (B_n) e (f_n) , em que cada termo das seqüências é calculado recursivamente.

Sejam L , f_0 e G_0 tais que o problema de valor inicial (3.1) possui única solução $u_0(x, t)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 1$. O algoritmo iterativo consiste dos seguintes passos, para $n = 1, 2, 3, \dots$,

1. Obtenha $u_{n-1}(x, L)$ evoluindo do dado inicial f_{n-1} do tempo $t = 1$ até $t = L$, de acordo com a equação (3.4) para u_{n-1} .
2. Calcule os expoentes α_n e β_n , conforme discutiremos mais adiante.
3. Defina $f_n(x) = L^{\alpha_n} u_{n-1}(L^{\beta_n} x, L)$.
4. Calcule os prefatores A_n e B_n por (3.8).
5. Calcule os parâmetros do operador G_n a ser usado na próxima iteração, de acordo com a relação (3.5).

É o algoritmo numérico acima que usaremos para verificar as conjecturas já apresentadas ou até mesmo para se determinar os expoentes críticos sem que os mesmos sejam conhecidos *a priori* (como, por exemplo, na equação de Barenblatt).

O expoente α pode ser sempre computado no passo 2 pela fórmula $\alpha_n = -\ln_L u_{n-1}(0, L)$ de forma que $f_n(0) = 1$. A razão para isso é a suposta dinâmica auto-similar que esperamos encontrar: no regime assintótico, a solução u_0 em $x = 0$ se comporta como

$$u_0(0, t) \sim c t^{-\alpha}. \quad (3.9)$$

Como, por construção, $u_n(0, 1) = 1$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, e dada a relação entre u_n no intervalo de tempo $t \in [1, L]$ e u_0 em $t \in [L^n, L^{n+1}]$ na equação (3.3), temos que

$$\frac{u_0(0, L^{n+1})}{u_0(0, L^n)} = \frac{1}{L^{\alpha_{n+1}}}$$

e, por (3.9), esperamos que, quando $n \rightarrow \infty$, α_n se aproxime de α .

Enquanto o cálculo dos expoentes (α_n) pode ser sempre feito da forma descrita acima, a forma de se determinar os expoentes (β_n) depende do problema. Normalmente envolve uma relação de escala entre α_n e β_n de forma que uma certa parte do operador diferencial (escolhida *a priori*) permaneça invariante sob a renormalização da equação.

Para ilustrar esta idéia, vamos rever brevemente o estudo da equação

$$u_t = u_{xx} + \lambda u^a u_x^b u_{xx}^c.$$

A equação renormalizada é dada por

$$u_t = L^{1-2\beta_n} u_{xx} + L^{[1-(b+2c)\beta_n+(1-a-b-c)\alpha_n]} \lambda u^a u_x^b u_{xx}^c.$$

Se escolhermos $\beta_n = \frac{1}{2}$, a parte linear da equação é mantida invariante e a dinâmica associada à equação

$$u_t = u_{xx} \tag{3.10}$$

pode ser explorada.

Por outro lado, se β_n é escolhido de forma a satisfazer a relação

$$1 - (b + 2c)\beta_n + (1 - a - b - c)\alpha_n = 0, \tag{3.11}$$

então é o operador não-linear

$$u_t = \lambda u^a u_x^b u_{xx}^c \tag{3.12}$$

que permanece invariante. Neste caso, é a dinâmica da equação (3.12) que pode ser explorada.

Na linguagem do RG, a escolha de $\beta_n = \frac{1}{2}$ concentra a atenção na dinâmica de (3.10) e, dessa forma, é própria para a investigação de perturbações irrelevantes e marginais. A escolha (3.11) leva o foco para (3.12) e permite a investigação dos casos de perturbações relevantes.

Por último, a mudança de escala da variável espacial, no passo 3, pode ser feita de duas formas. A primeira foi utilizada por Chen e Goldenfeld [8] e consiste em modificar o tamanho da malha

Δx sem mudar os sítios discretos $j = 0, 1, 2, \dots$, de forma que depois da n -ésima iteração temos $(\Delta x)' = L^{-\beta} \Delta x$ e os pontos da nova malha estarão localizados em $x = j(L^{-\beta} \Delta x)$. A outra forma consiste em mudar os sítios discretos mantendo o tamanho da malha fixo, de forma que os sítios discretos, após a mudança de escalas, estarão em $x = (L^{-\beta} j) \Delta x$. Neste caso, os valores da solução u nos pontos $x = j \Delta x$ da malha fixa têm que ser interpolados em cada iteração.

A última técnica para se mudar a escala espacial referida acima foi proposta por Braga, Furtado e Isaia (veja a tese de doutorado de Isaia [19] e referências lá citadas). Utilizando este ponto de vista conseguimos um custo constante para cada iteração do algoritmo. Neste caso, temos um enorme ganho computacional, uma vez que, para se calcular $u(\cdot, L^n)$ a partir de $u(\cdot, 1)$ precisamos fazer n integrações no intervalo $[1, L]$ a custo constante.

3.3 Implementação

Esta seção descreve algumas características da versão do algoritmo descrito acima que foi implementada pelo autor desta dissertação. O algoritmo numérico foi implementado em linguagem C e a geração dos arquivos de entrada, bem como dos gráficos e tabelas a partir dos arquivos de saída, foi feita com o auxílio do software Maple[®]. Essa versão foi utilizada na obtenção dos resultados apresentados nos artigos [4, 3] e no Capítulo 4 desta dissertação. O leitor que esteja interessado apenas em conhecer o algoritmo em si, ou que queira implementar sua própria versão, pode dispensar a leitura desta seção.

Equação e parâmetros

O programa considera a equação

$$u_t = G(u, u_x, u_{xx}, x, t) = \chi(t^p + \delta t^r)[1 + \epsilon H(-(u^m)_{xx})][1 + \mu \cos(\omega x)](u^m)_{xx} + \lambda u^a u_x^b u_{xx}^c,$$

onde H é a função de Heaviside. Os parâmetros do programa são: $L, \chi, p, \delta, r, \epsilon, \mu, \omega, m, \lambda, a, b$ e c , além da condição inicial, do número de iterações desejadas e da opção para mudança de escalas na variável espacial (veja este tópico mais adiante). Normalmente, escolhemos $\chi = m = \omega = 1$

e $\epsilon = 0$ para o estudo dos Problemas 1 e 2. O parâmetro m é usado no estudo de equações que não consideramos nessa dissertação – portanto, em todas as simulações aqui mencionadas, assumimos a escolha de $m = 1$ – e o parâmetro ϵ é usado para estudarmos a equação de Barenblatt na validação do método (veja a Seção 4.1 no próximo capítulo).

Discretização da equação

Para a discretização da EDP, podemos utilizar qualquer esquema apropriado. Escolhemos um esquema simples de diferenças finitas que combina o método de Euler para a discretização no tempo e, para a discretização no espaço, a fórmula padrão de três pontos para o operador Laplaceano e diferenças centradas para derivadas espaciais de primeira ordem. Dentro das limitações de estabilidade, o esquema resultante é de segunda ordem.

Para discretizar o espaço-tempo, fazemos $x = j\Delta x$ e $t = n\Delta t$, onde Δx é o tamanho da malha e Δt é o passo no tempo. Integramos a versão discreta da EDP para obtermos os dados $(u(j\Delta x, L))_j$ que aproximam a função $u(x, L)$ nos sítios discretos $x = j\Delta x$. Denotaremos por u_j^n a aproximação para $u(j\Delta x, n\Delta t)$.

As derivadas serão aproximadas da seguinte forma:

$$u_{xx}(j\Delta x, n\Delta t) \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}, \quad (3.13)$$

$$u_x(j\Delta x, n\Delta t) \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2(\Delta x)}. \quad (3.14)$$

Assim, temos o esquema de Euler explícito

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t G \left(u_j^n, \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2(\Delta x)}, \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}, j\Delta x, n\Delta t \right).$$

Condição de estabilidade

Reescrevemos a equação como

$$u_t = G(u, u_x, u_{xx}, x, t) = K(x, t, u_{xx})u_{xx} + \lambda u^a u_x^b u_{xx}^c.$$

Uma condição suficiente de estabilidade será¹:

$$\frac{\partial G}{\partial u_{xx}} \pm \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial G}{\partial u_x} \geq 0 \quad \text{e} \quad 1 + \frac{\partial G}{\partial u} \Delta t - 2 \frac{\partial G}{\partial u_{xx}} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \geq 0.$$

Tome $K', K'' \in \mathbb{R}$ satisfazendo $0 < K' \leq K(x, t, u_{xx}) \leq K'' < \infty$.

Supondo que $\lambda = 0$, temos

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2K''}$$

como condição suficiente de estabilidade.

Supondo que a solução u da equação satisfaça² $|u| \leq 1$, $|u_x| \leq 1$ e $|u_{xx}| \leq 1$, temos as condições abaixo como condições suficientes para a estabilidade:

$$\begin{aligned} \Delta x &\leq \frac{2}{b|\lambda|}(K' - c|\lambda|) \\ \frac{\Delta t}{\Delta x^2} &\leq \frac{1}{\Delta x^2 a|\lambda| + 2K'' + 2c|\lambda|}. \end{aligned}$$

Condição de fronteira

A vantagem do método explícito é que ele torna a velocidade de propagação da informação finita. Isso possibilita o estudo de problemas de valor inicial com dado inicial de suporte compacto adicionando-se mais um sítio discreto na variável espacial a cada novo passo de tempo. Dessa forma, a solução não é afetada por condições de contorno artificiais.

Mudança de escala na variável espacial

As duas formas de mudar a escala no passo 3 do algoritmo foram implementadas. A interpolação implementada foi a interpolação linear canônica. Uma desvantagem da interpolação é que ela não conserva a integral discreta da função interpolada. No estudo das equações lineares conservativas, em que o prefator depende apenas da integral do dado inicial, utilizamos a mudança de escala

¹Veja o livro de Ames [1], Seção 2-18, p. 104.

²A limitação imposta sobre a solução u e suas derivadas é satisfeita por funções da forma $\phi(x) = \exp(-kx^2/4)$, $k \leq 3$, por exemplo.

sem interpolação para tornar o resultado mais fino. No Problema 1 com $\mu \neq 0$, as oscilações do coeficiente de difusão têm seu período diminuído na mesma proporção que os intervalos da malha discreta no passo de mudança de escalas; neste caso, para enxergar o efeito da oscilação deste coeficiente com certa fidelidade, o recurso da interpolação também foi deixado de lado. Nas demais simulações utilizamos a interpolação.

Ressaltamos que é possível fazer uma interpolação que conserve a integral discreta da função interpolada. Para isso deve-se adotar outro ponto de vista no momento da interpolação, que consiste em associar os valores às células e não aos pontos. Para o leitor interessado em se aprofundar nesta direção, indicamos o livro de LeVeque [21].

Fator de escala L

A escolha do valor de L é puramente empírica. Em princípio qualquer fator de escala $L > 1$ poderia ser usado. Para um valor de L muito grande, um elevado número de passos no tempo seria necessário para cada iteração do RG, e a malha espacial seria rapidamente contraída em poucas iterações devido à mudança de escala na variável espacial. Para um valor de L muito pequeno, seria necessário um número muito maior de iterações para se obter a acurácia desejada. Escolhemos um fator de escala $L = 1,4$ nas simulações em que utilizamos a interpolação no passo 3; escolhemos L entre 1,02 e 1,021 nos demais casos.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

O objetivo deste capítulo é estudar os Problemas 1 e 2 utilizando a implementação do RG numérico descrita no capítulo anterior. Primeiramente, procuraremos validar o método utilizando o mesmo no estudo de problemas de valor inicial em que soluções analíticas são conhecidas ou para os quais existem teoremas sobre a forma assintótica das soluções. Em seguida fazemos um estudo numérico da convergência do método, através de um refinamento de malha. Finalmente, usamos o algoritmo do RG para estudar os Problemas 1 e 2 do Capítulo 1. Cumpre notar que fazemos um estudo padronizado da equação do calor, em que verificamos:

- a convergência do expoente α_n para o valor teórico $\alpha = 1/2$ com diferentes condições iniciais, de forma a confirmar a universalidade desse expoente crítico com respeito ao dado inicial;
- a convergência do prefator A_n para algum $A > 0$ em todas as simulações feitas;
- que o prefator A é de fato dado por $(4\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$;
- a convergência das funções de perfil nas normas L^1 e L^∞ ;
- que a função de perfil ϕ , obtida como $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, é de fato a gaussiana ϕ_* .

Nos estudos subseqüentes, alguns dos gráficos referentes aos itens acima serão omitidos por não trazerem grande novidade. As convergências de (B_n) e (β_n) são obtidas trivialmente uma vez

que o procedimento escolhe sempre o mesmo valor de β_n para manter o termo linear invariante sob a renormalização da equação.

A Seção 4.1 é dedicada à validação do método. Começamos pelo estudo padronizado da equação do calor, comprovando a universalidade do expoente α e da função de perfil ϕ , assim como a expressão para o prefator em termos da integral da condição inicial. Daí em diante, alguns gráficos análogos, que foram gerados em outras simulações numéricas, são omitidos por se tratar de repetições monótonas que acrescentam poucas informações, como a convergência da diferença relativa entre duas funções de perfil para zero ou a verificação de que a função de perfil é dada pela gaussiana. Estudamos então a equação de difusão não-linear e verificamos que as perturbações não-lineares classificadas como *irrelevantes* de fato não alteram o comportamento assintótico exceto pelo prefator A . A equação de Barenblatt é um exemplo bem ilustrativo: o expoente α não pode ser determinado de forma exata analiticamente nem formalmente, restando o recurso numérico como alternativa para se calcular este expoente. A validação neste caso é feita comparando-se o expoente calculado numericamente com aquele advindo de uma aproximação de primeira ordem conhecida na literatura. Por último, escolhemos uma das condições iniciais e repetimos seu estudo com uma malha duas vezes mais fina. A semelhança visual entre os gráficos obtidos, exceto por uma ligeira suavização e maior precisão para a malha mais fina são os indicativos de convergência do método com relação ao refinamento da malha.

Na Seção 4.2, estudamos o problema de difusão com coeficiente periódico (Problema 1 da Introdução). Os resultados apresentados nessa seção são essencialmente aqueles feitos no artigo [4] e constituem-se principalmente da verificação da Conjectura 2.9 do Capítulo 2. O fato que traz mais novidade é a mudança da função de perfil devido à homogeneização do coeficiente de difusão.

Na Seção 4.3 é feito o estudo dos teoremas e das conjecturas da Seção 2.3.2 do Capítulo 2, que tratam do problema de difusão com coeficiente dependente do tempo (Problema 2 da Introdução). Esse estudo pode ser encontrado no artigo em elaboração [3]. As parte mais interessantes, na opinião do autor, são a ampliação da classe de perturbações não-lineares *irrelevantes* para $p > 0$, que passa a incluir todas aquelas que eram marginais nas outras equações, como u^3 , uu_x e u_{xx} ,

e a transição de fase entre os regimes assintóticos linear e não-linear para uma forma particular da equação com expoente não-inteiro e solução positiva.

Como dito acima, os gráficos que trazem informação repetitiva são omitidos nas Seções 4.2 e 4.3.

Em todo este capítulo, o símbolo ϕ vai denotar a função f_n obtida no último passo da iteração do algoritmo, após terem sido obtidas as convergências desejadas.

Chamamos a atenção para uma diferença na definição das funções de perfil. A versão numérica que implementamos (descrita no Capítulo 3), calcula α_n de maneira a forçar que $f_n(0) = 1$ para $n \geq 1$. Por este motivo, será conveniente redefinir

$$\phi_*(x) = e^{-x^2/4}, \quad \phi_p(x) = e^{-(p+1)x^2/4} \quad \text{e} \quad \phi_\sigma(x) = e^{-x^2/4\sigma}.$$

Isso implica na necessidade das constantes $\sqrt{1/4\pi}$, $\sqrt{(p+1)/4\pi}$ e $\sqrt{1/4\pi\sigma}$, respectivamente, multiplicando o prefator A dos teoremas e conjecturas apresentados no Capítulo 2 e mencionados na Introdução. Em particular, teremos as seguintes relações, que serão usadas mais adiante:

$$-\ln \phi_* = x^2/4 \tag{4.1}$$

$$-\ln \phi_p = (p+1) \cdot (x^2/4) \tag{4.2}$$

$$-\ln \phi_\sigma = \frac{1}{\sigma} \cdot (x^2/4). \tag{4.3}$$

4.1 Validação do método

4.1.1 Equação do calor

Vimos no Capítulo 2 que o comportamento assintótico das soluções da equação do calor com condição inicial $u(\cdot, 0) = f \in \mathcal{B}_4$ é dado por

$$u(x, t) \approx \frac{A}{t^\alpha} \phi\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \tag{4.4}$$

com $\alpha = \beta = 1/2$, $\phi = \phi_*$ e $A = (4\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$. Segundo os resultados teóricos já apresentados, α , β e ϕ são universais com respeito à condição inicial, desde que a mesma esteja, por

exemplo, em \mathcal{B}_4 . Por outro lado, o prefator A depende apenas do que chamamos de *massa* do dado inicial f , dada por $\int_{\mathbb{R}} f(y)dy$.

As três condições iniciais utilizadas, f_1 , f_2 e f_3 , são exibidas nas Figuras 4.1, 4.2 e 4.3, respectivamente.

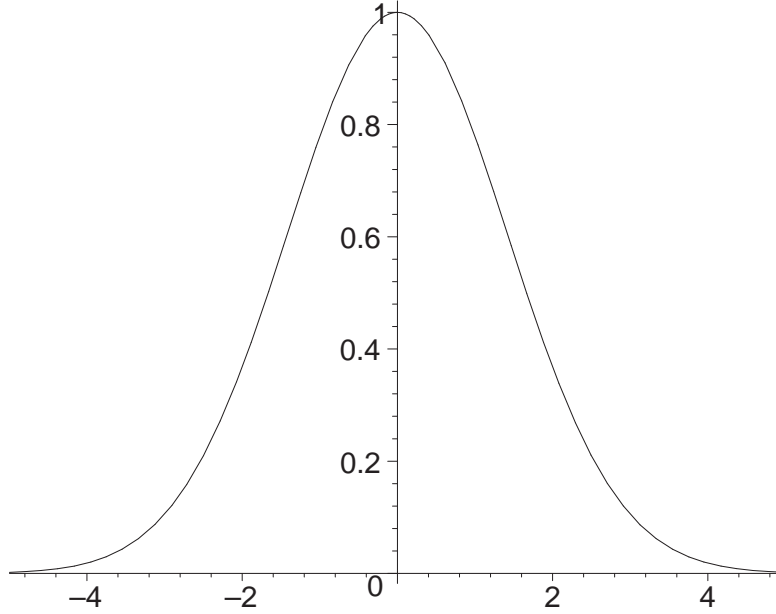


Figura 4.1: Gráfico da condição inicial f_1 .

A Figura 4.4 mostra a convergência do expoente α_n , calculado na n -ésima iteração do algoritmo, para o valor teórico $\alpha = 1/2$, com diferentes condições iniciais. Isso ilustra a universalidade de α com respeito a condições iniciais suficientemente localizadas (por exemplo, de suporte compacto).

A Figura 4.5 mostra a convergência dos prefatores A_n para os valores teóricos.

A Figura 4.6 mostra uma curva parametrizada cujas componentes são $(x^2/4, -\ln \phi(x))$. O fato de todo ponto desta curva estar em uma reta de inclinação igual a 1 significa que $\phi = \phi_*$.

Finalmente, na Figura 4.7 plotamos a diferença relativa entre duas funções de perfil consecutivas, $\|f_n - f_{n-1}\|/\|f_n\|$, como uma função do número n de iterações do RG. As normas que utilizamos em todas as simulações são L^1 e L^∞ . O gráfico exibido na Figura 4.7 foi gerado com a norma

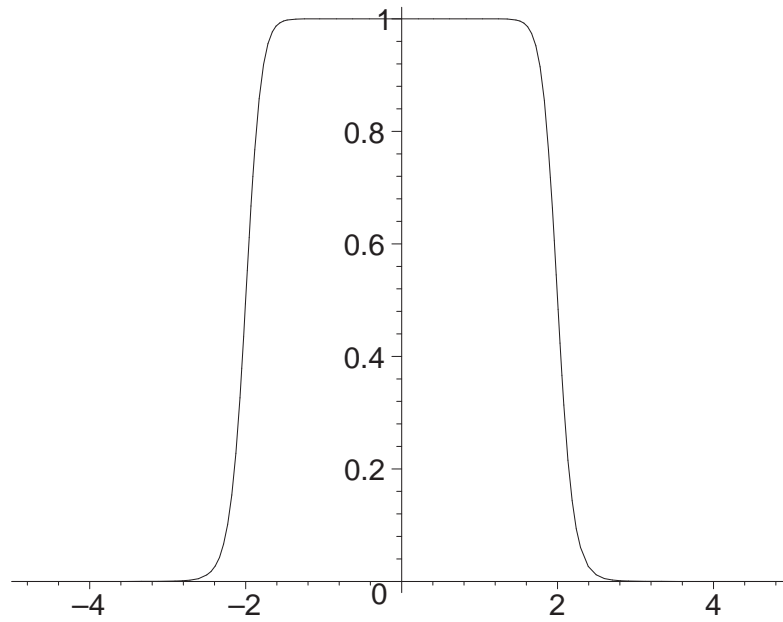


Figura 4.2: Gráfico da condição inicial f_2 .

$L^1(\mathbb{R})$. A convergência dessa diferença para zero é forte indicativo da convergência de (f_n) e, conseqüentemente, de um comportamento assintótico auto-similar. O cálculo da diferença relativa também pode ser utilizado como um critério de parada das iterações.

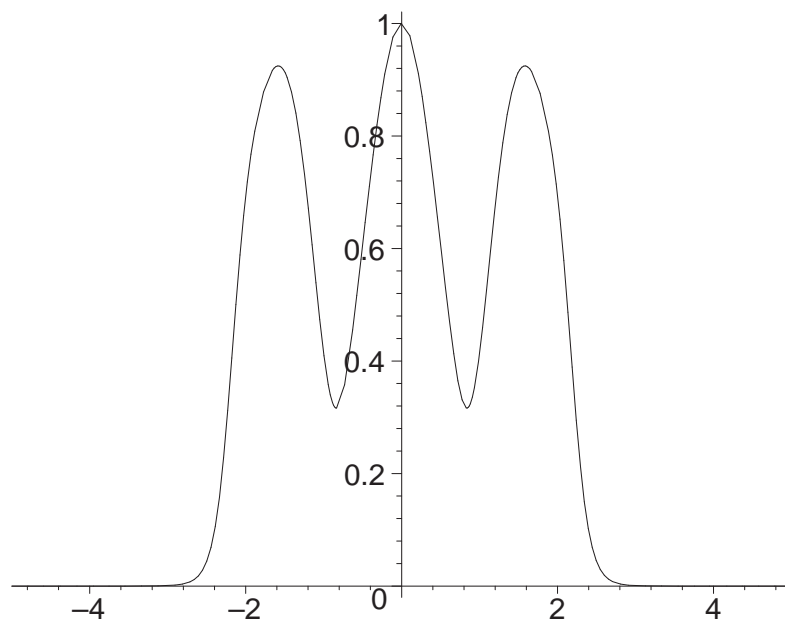


Figura 4.3: Gráfico da condição inicial f_3 .

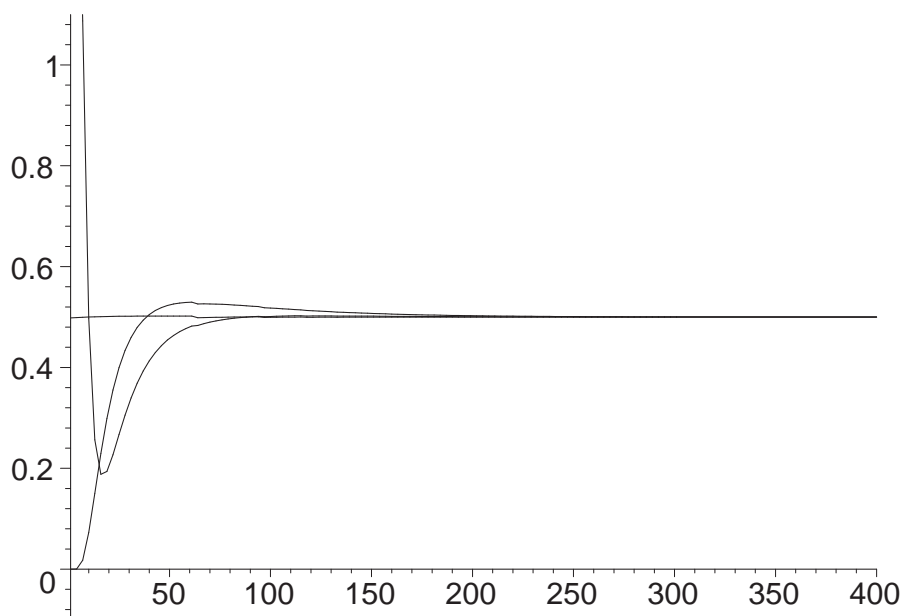


Figura 4.4: Curvas $\alpha_n \times n$ para a equação do calor com diferentes condições iniciais.

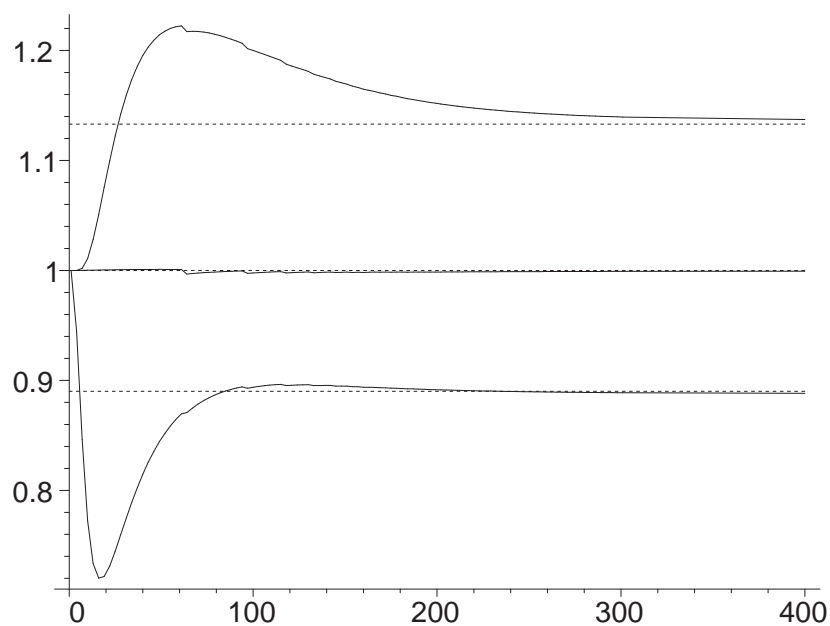


Figura 4.5: Curvas $A_n \times n$ para a equação do calor com diferentes condições iniciais. As linhas pontilhadas correspondem aos valores teóricos. Estes valores, dados por $(4\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(y)dy$, são 1,000, 1,133 e 0,8901.

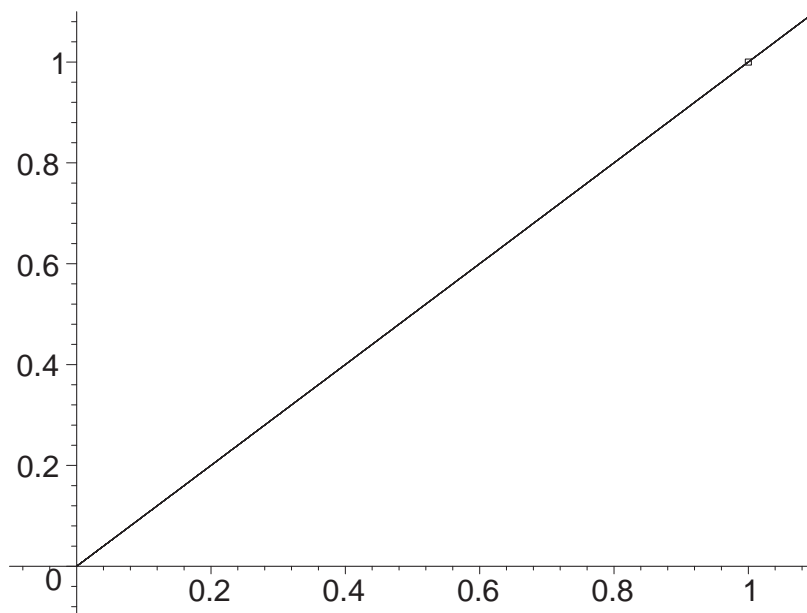


Figura 4.6: Curvas $-\ln \phi \times x^2/4$ para a equação do calor com diferentes condições iniciais (as curvas se sobrepõem).

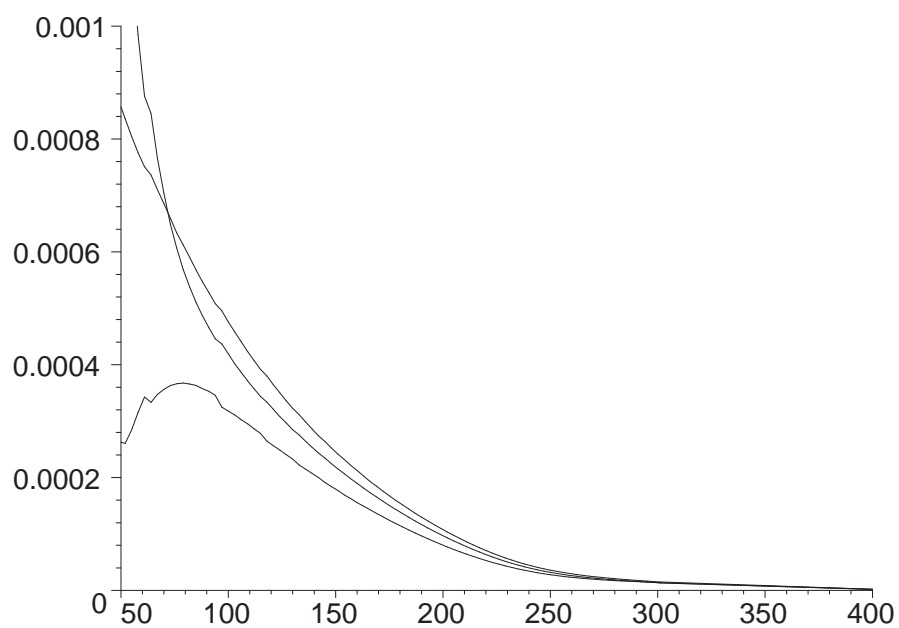


Figura 4.7: Curvas $(\|f_n - f_{n-1}\| / \|f_n\|) \times n$ para a equação do calor com diferentes condições iniciais.

4.1.2 Equação de difusão não-linear

O Teorema 2.7 diz que soluções da equação

$$u_t = u_{xx} + \lambda u^a u_x^b u_{xx}^c,$$

com condição inicial $u(\cdot, 0) = f \in \mathcal{B}_4$ e $a + 2b + 3c - 3 > 0$, se comportam como

$$u(x, t) \approx \frac{A}{t^\alpha} \phi\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \quad (4.5)$$

com $\alpha = \beta = 1/2$, $\phi = \phi_*$, e A é uma constante positiva que pode depender de λ , a , b , c e c .

Fizemos simulações numéricas em que variamos a condição inicial, o parâmetro λ e os expoentes a , b e c de maneira a satisfazer à condição $a + 2b + 3c - 3 > 0$. As simulações são descritas pela Tabela 4.1 e a universalidade de α é ilustrada na Figura 4.8.

Para todas as simulações, verificamos que $\phi = \phi_*$, que o prefator converge para algum número positivo e que a norma relativa da diferença entre duas funções de perfil consecutivas converge para zero.

| n | λ | a | b | c |
|-----|-----------|-----|-----|-----|
| 1 | .10 | 3 | 1 | 0 |
| 2 | .20 | 3 | 1 | 0 |
| 3 | -.10 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | .10 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | .15 | 3 | 1 | 0 |
| 6 | -.20 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | .30 | 1 | 0 | 1 |

Tabela 4.1: Descrição das simulações feitas no estudo das classes de universalidade do comportamento assintótico das soluções da equação de difusão não-linear, numeradas de 1 a 7.

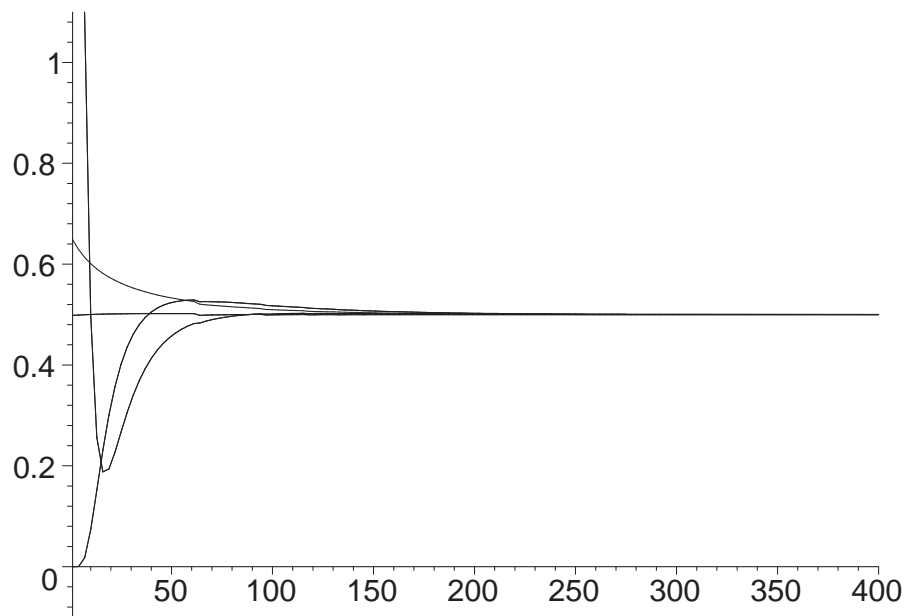


Figura 4.8: Gráfico de $\alpha_n \times n$ para as simulações descritas na Tabela 4.1, ilustrando a universalidade do expoente crítico α para perturbações irrelevantes da equação de difusão não-linear.

4.1.3 Equação de Barenblatt

Estudamos também a equação de Barenblatt

$$u_t = [1 + \epsilon H(-u_t)]u_{xx}, \quad (4.6)$$

onde $H(v)$ é a função de Heaviside com salto em $v = 0$. Resultados teóricos¹ fornecem uma aproximação de primeira ordem para o expoente α dada por

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi e}} + O(\epsilon^2).$$

Simulações foram feitas para diferentes valores de ϵ . Os valores de α calculados numericamente são comparados com o resultado teórico acima na Figura 4.9.

Em todas as simulações, verificamos que o prefator A_n converge a um número positivo e a norma relativa da diferença de duas funções de perfil consecutivas converge a zero.

O estudo numérico desta equação também ilustra uma característica interessante do RG numérico: é possível calcular os expoentes críticos ainda que os mesmos não sejam conhecidos de forma exata.

¹Ver [16] e referências lá citadas.

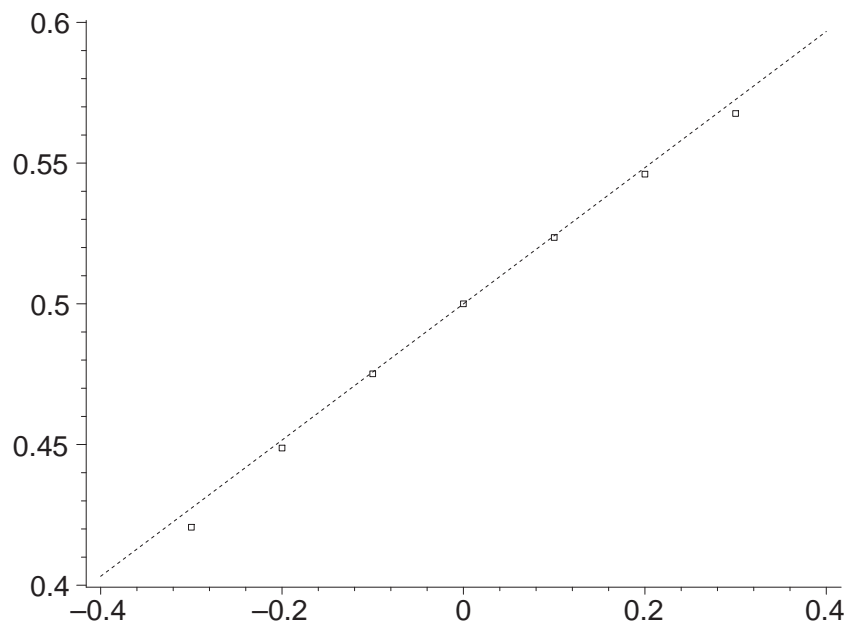


Figura 4.9: Curvas $\alpha \times \epsilon$ para diferentes simulações com a equação de Barenblatt, onde α é calculado numericamente e a reta pontilhada é dada pela aproximação de primeira ordem.

4.1.4 Refinamento da malha

Para a equação do calor, fizemos um teste de refinamento de malha utilizando a condição inicial f_2 e uma outra idêntica à f_2 porém com uma malha duas vezes mais fina. Os gráficos de α_n e A_n são exibidos nas Figuras 4.10 e 4.11, respectivamente. Na simulação com a malha refinada foi verificado que $\phi = \phi_*$ e que a norma relativa da diferença de duas funções de perfil consecutivas converge a zero.

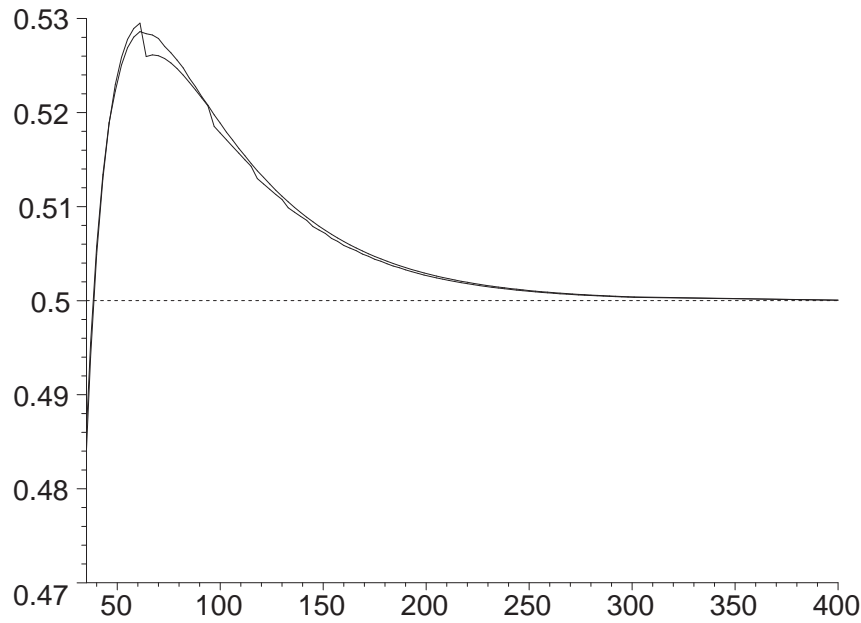


Figura 4.10: Curva $\alpha_n \times n$ para a equação do calor com condição inicial f_2 ; uma curva foi gerada com a malha duas vezes mais fina que a outra.

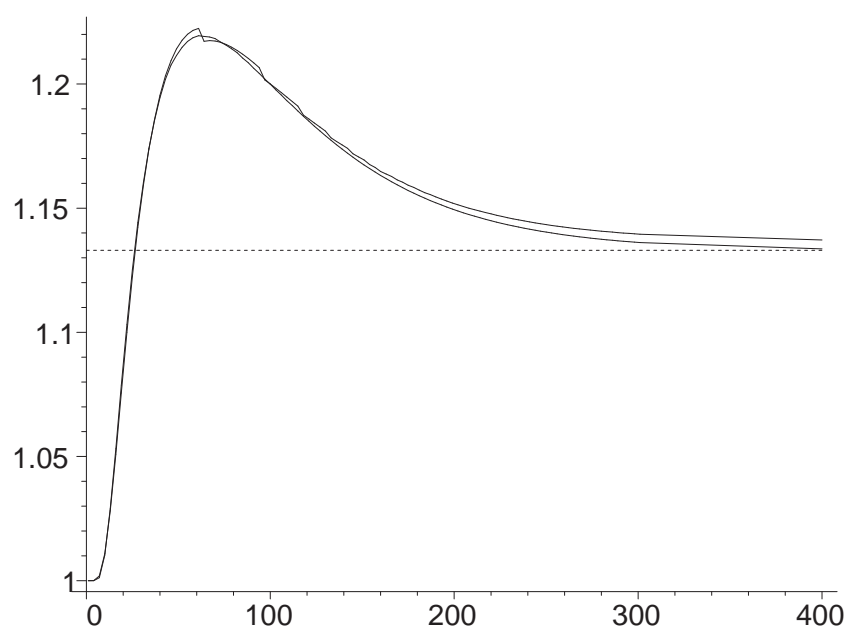


Figura 4.11: Curva $A_n \times n$ para a equação do calor com condição inicial f_2 ; uma curva foi gerada com a malha duas vezes mais fina que a outra.

4.2 Difusão com coeficiente periódico

As simulações discutidas nesta seção visam a corroborar a Conjectura 2.9.

Nas simulações realizadas, observamos a convergência de α_n para $\alpha = 1/2$. Para verificar a universalidade deste fato, utilizamos diferentes condições iniciais (Figura 4.12), perturbações não-lineares (Figura 4.14) e valores de μ (Figura 4.13).

Em todas as simulações, a convergência da norma relativa da diferença entre funções de perfil consecutivas convergiu para zero e o prefator A_n convergiu para um número positivo.

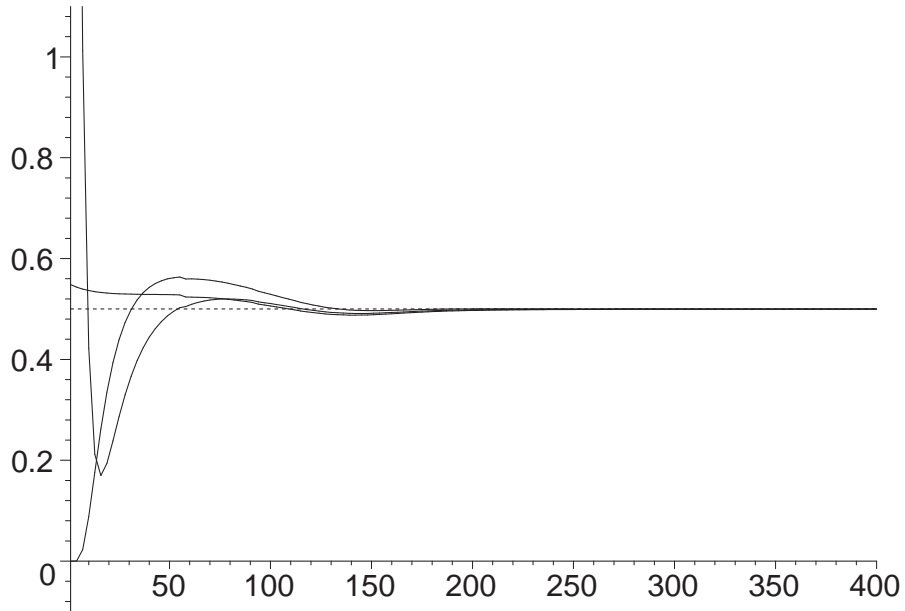


Figura 4.12: Curvas $\alpha_n \times n$ para o problema de difusão com coeficiente periódico e diferentes condições iniciais.

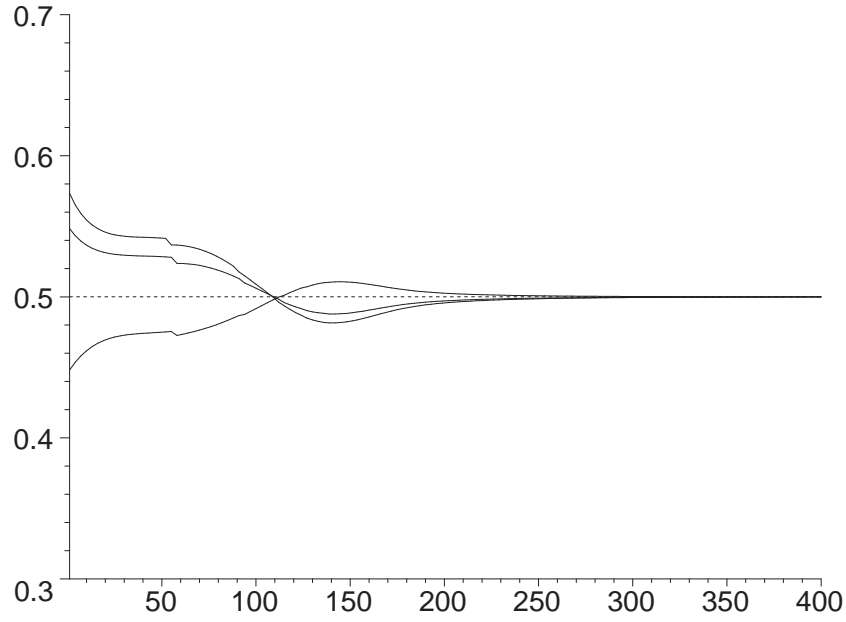


Figura 4.13: Curvas $\alpha_n \times n$ para o problema de difusão com coeficiente periódico e diferentes valores de μ .

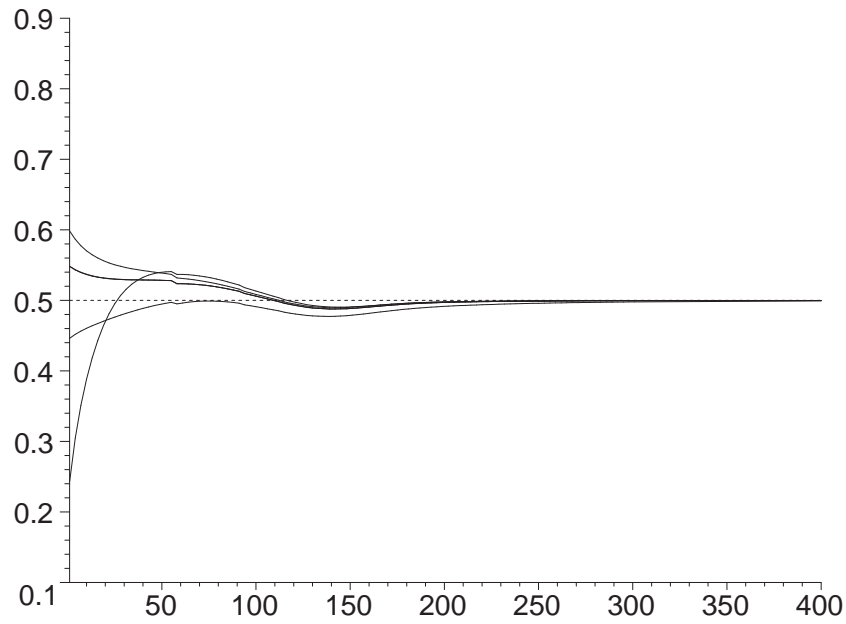


Figura 4.14: Curvas $\alpha_n \times n$ para o problema de difusão com coeficiente periódico e diferentes perturbações não-lineares irrelevantes.

4.2.1 Homogeneização do coeficiente de difusão

A principal diferença desta equação em relação à equação do calor, ou à equação de difusão não-linear, é a mudança da função de perfil causada pelo termo $\mu g(x)$. Por isso, plotamos as curvas $-\ln(\phi(x)) \times x^2/4$ para diversos experimentos. O fato de estas curvas serem retas com inclinações σ^{-1} significa que $\phi = \phi_\sigma$ para cada uma delas – veja (4.3). A Figura 4.15 mostra essa curva para $\mu = 0,8$ e $g = \cos$, juntamente com o valor de $\sigma = 0,6$ esperado teoricamente.

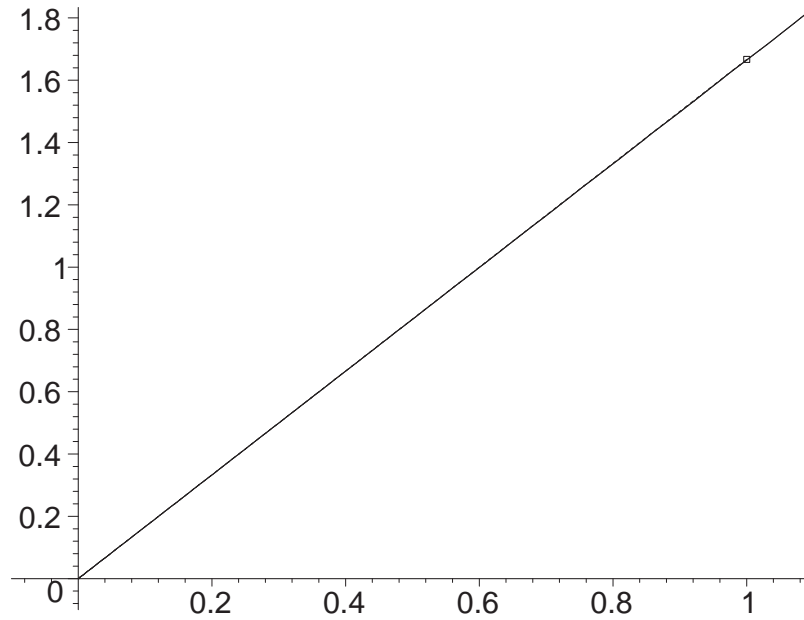


Figura 4.15: Curva parametrizada $(-\ln \phi, x^2/4)$, cujo traço é uma reta com inclinação σ^{-1} .

4.3 Difusão dependente do tempo

Nesta seção vamos estudar os resultados apresentados na Seção 2.3.2 do Capítulo 2. Esses resultados consideram o problema de difusão com coeficiente dependente do tempo. O caso linear é coberto pelo Teorema 2.11, enquanto para o caso não-linear foi formulada a Conjectura 2.12. Começamos pelo caso linear.

4.3.1 Caso linear

Considere a equação

$$u_t = (t^p + \delta t^r) u_{xx},$$

onde $r < p$, com condição inicial $u(\cdot, 1) = f \in \mathcal{B}_4$. O Teorema 2.11 diz que as soluções deste problema se comportam assintoticamente como

$$u(x, t) \approx \frac{A}{t^\alpha} \phi\left(\frac{x}{t^\beta}\right),$$

com $\alpha = \beta = (p + 1)/2$, $\phi = \phi_p$ e $A = [(p + 1)/4\pi]^{1/2} \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$.

Para estudar numericamente o resultado acima, realizamos um conjunto de 18 simulações, que correspondem à combinação de três condições iniciais diferentes com coeficientes de difusão de seis formas diferentes, dadas por: $t^{1/2} + t^{1/4}$; $t^{1/2} + 1$; $t^{1/2}$; $t + t^{3/4}$; $t + 1$; e t .

A Figura 4.16 mostra a convergência dos expoentes α para o valor $(p + 1)/2$ e sua universalidade com respeito ao termo δt^r e à condição inicial f . Os valores de p utilizados são $1/2$ e 1 , determinados pelos coeficientes $K(t)$ listados no parágrafo anterior.

O prefator A é também universal com respeito a detalhes nas condições iniciais e depende apenas da integral das mesmas. A Figura 4.17 mostra a convergência do prefator para os valores teóricos $A = \sqrt{(p + 1)/4\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$.

Por ultimo, a Figura 4.18 revela que a função de perfil é, de fato, dada por $\phi = \phi_p$.

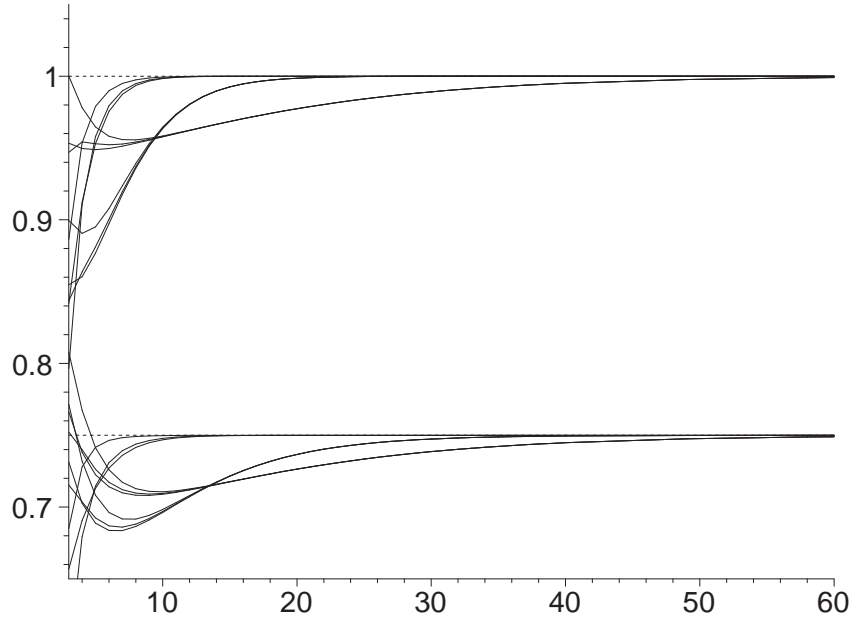


Figura 4.16: Curvas $\alpha_n \times n$ para a equação linear com coeficiente dependente do tempo para diferentes coeficientes e condições iniciais. Os valores teóricos que correspondem a $p = 1/2$ e $p = 1$ são, respectivamente, $\alpha = 0,75$ e $\alpha = 1,0$.

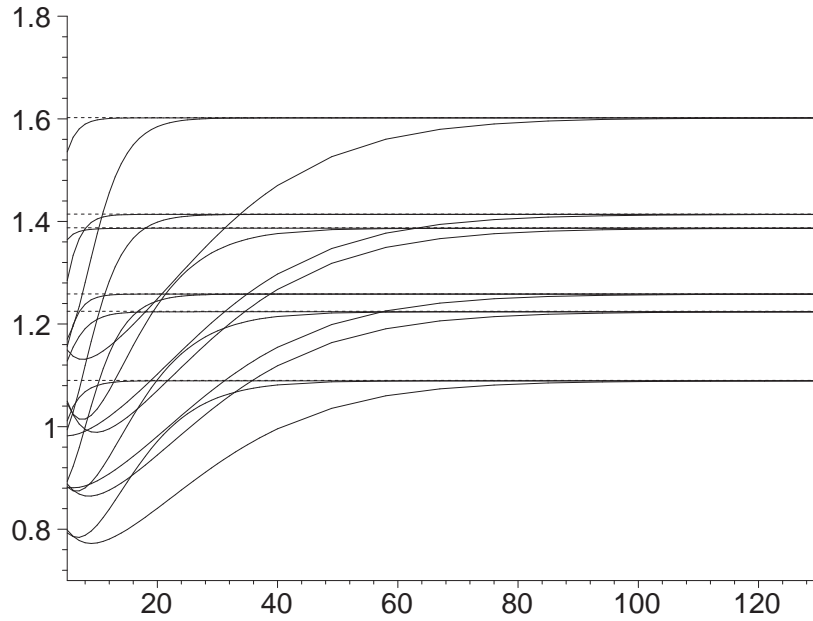


Figura 4.17: Curvas $A_n \times n$ para a equação com coeficiente dependente do tempo para diferentes coeficientes e condições iniciais. As linhas pontilhadas correspondem aos valores teóricos. Estes valores, dados por $[(p+1)/4\pi]^{1/2} \int_{\mathbb{R}} f(y)dy$, são 1,090, 1,225, 1,259, 1,388, 1,414 e 1,602.

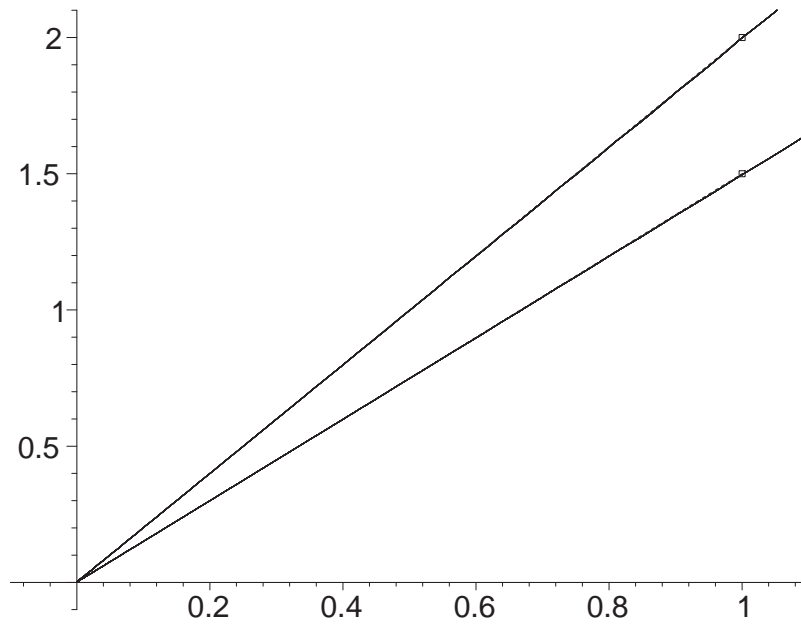


Figura 4.18: Curvas parametrizadas $-\ln \phi \times x^2/4$ para a equação com coeficiente dependente do tempo com diferentes coeficientes e condições iniciais. A inclinação da reta deve ser dada por $p + 1$. Cada curva visível no gráfico é na verdade a superposição de nove curvas geradas pelas simulações descritas acima. As linhas pontilhadas e o ponto marcado $(1, p + 1)$ correspondem aos valores teóricos.

4.3.2 Caso não-linear

Consideramos a equação

$$u_t = (t^p + \delta t^r)u_{xx} + \lambda u^a u_x^b u_{xx}^c.$$

Todas as perturbações não-lineares que foram classificadas como irrelevantes para a equação de difusão não-linear, ou seja, aquelas que satisfazem $d_F = a + 2b + 3c - 3 > 0$, ainda são irrelevantes para a equação com coeficiente de difusão dependente do tempo para $p \geq 0$, pois satisfazem $\eta_F = a + 2b + 3c - (3 + p)/(1 + p) > 0$.

No caso em que $p > 0$, as perturbações que antes eram classificadas como marginais, agora passam a ser também irrelevantes. Essas perturbações podem ser $F = u^3$, $F = uu_x$ ou $F = u_{xx}$.

A Conjectura 2.12 diz que o comportamento assintótico das soluções da equação acima ainda é o mesmo dado pela equação linear tratada pelo Teorema 2.11, exceto pelo fato de que o prefator A é uma constante positiva que depende da condição inicial, do coeficiente de difusão e da perturbação não-linear, desde que a perturbação não-linear F satisfaça $\eta_F > 0$.

Os gráficos relativos às simulações feitas nesta seção são omitidos por serem todos análogos aos que já foram apresentados em seções anteriores. Por esta razão vamos nos limitar a exibir a Tabela 4.2, que descreve as simulações realizadas visando a confirmar a afirmação do parágrafo anterior.

| n | p | λ | a | b | c |
|-----|-----|-----------|-----|-----|-----|
| 1 | .50 | .10 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | .50 | .10 | 3 | 0 | 0 |
| 3 | .50 | .10 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | .25 | .10 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | .25 | .10 | 3 | 0 | 0 |
| 6 | .25 | .10 | 0 | 0 | 1 |
| 7 | .50 | .10 | 3 | 1 | 0 |
| 8 | .50 | .20 | 3 | 1 | 0 |
| 9 | .50 | -.10 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | .50 | .10 | 0 | 1 | 1 |
| 11 | .50 | .15 | 3 | 1 | 0 |
| 12 | .50 | -.20 | 1 | 1 | 1 |
| 13 | .50 | .30 | 1 | 0 | 1 |

Tabela 4.2: Descrição das simulações feitas no estudo das classes de universalidade do comportamento assintótico das soluções da equação de difusão não-linear com coeficiente de difusão dependente do tempo, numeradas de 1 a 13.

4.3.3 Transição de fase

Vamos estudar numericamente a equação

$$u_t = t^p u_{xx} - u^a, \quad (4.7)$$

onde a e p são parâmetros reais tais que $a > 1$ e $p \geq 0$.

Dado $p \geq 0$, o expoente a que corresponde a uma perturbação marginal é ²

$$a = \frac{p+3}{p+1}. \quad (4.8)$$

No plano (p, a) , a curva (4.8) é formalmente a interface entre a *região relevante* $a > (p+3)(p+1)^{-1}$ e a *região irrelevante* $a < (p+3)(p+1)^{-1}$. O estudo da função de perfil, do expoente crítico α e dos prefatores, indica que (4.8) é de fato a *curva crítica* para a *transição de fase* entre os estados relevante e irrelevante.

A Figura 4.19 mostra o espaço de parâmetros (p, a) com a curva crítica (ou separatriz) juntamente com as simulações que fizemos neste trabalho. A curva $a_c(p) = (p+3)(p+1)^{-1}$ corresponde aos valores de (p, a) que tornam a equação (4.7) invariante à renormalização com expoentes $\beta = (p+1)/2$ e $\alpha = (p+1)/2 = 1/(a-1)$.

Para os valores de (p, a) acima da curva crítica, o operador não-linear tende a zero sob a ação de sucessivas renormalizações com $\beta = \alpha = (p+1)/2$, enquanto a parte linear permanece invariante. Neste caso, o regime assintótico das soluções é essencialmente da equação linear.

Para os valores de (p, a) abaixo da curva crítica, a equação (4.7) permanece invariante para $\beta = (p+1)/2$ and $\alpha = 1/(a-1)$. Neste caso o expoente de decaimento é determinado pela parte não-linear do operador, enquanto a difusão é devida ao termo linear, e a função de perfil depende de ambos.

A Figura 4.20 mostra o gráfico da função

$$\alpha(p, a) = \max \left\{ \frac{1+p}{2}, \frac{1}{a-1} \right\}. \quad (4.9)$$

²Faça $\eta = 0$ em (1.10).

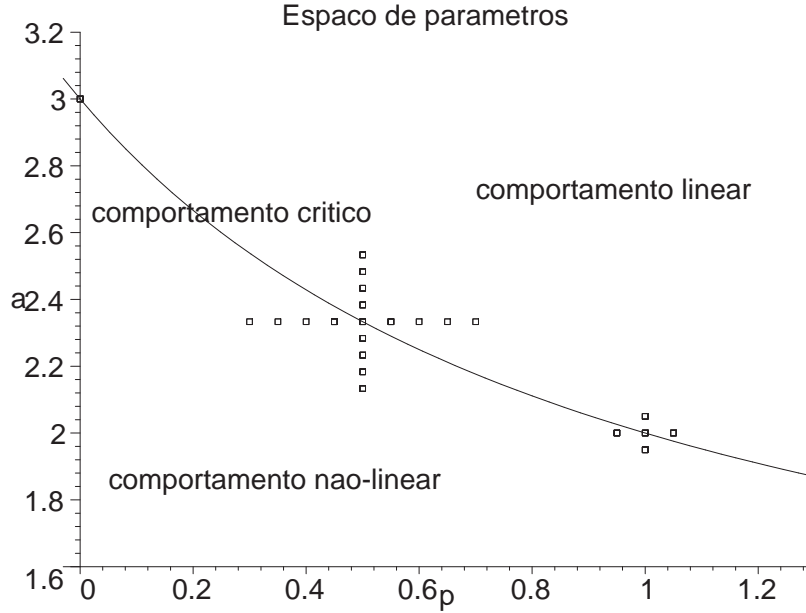


Figura 4.19: Espaço de parâmetros (p, a) para a equação (4.7). A curva crítica separa os regimes linear e não-linear da equação. Os quadrados representam os parâmetros para os quais foram feitas as simulações numéricas.

Olhando para as curvas de nível da superfície gerada, é possível perceber que as singularidades da superfície (p, a, α) formam uma curva que corresponde aos parâmetros p e a da curva crítica. É possível também perceber que de um lado dessa curva o expoente α é determinado por p enquanto do outro lado é determinado por a .

Com o objetivo de verificar a relação (4.9), na Figura 4.21 plotamos a interseção da superfície (4.9) com o plano $p = 1/2$, juntamente com os expoentes α calculados pelas nossas simulações. Além disso, a Tabela 4.3 compara os valores teóricos com os valores computados de α como uma função de a para $p = 1/2$ fixo. A Figura 4.22 e a Tabela 4.4 são análogos para $a = 7/3$ fixo e α como uma função p .

As Figuras 4.23 e 4.24 ilustram a diferença na convergência de (α_n) e (A_n) . Fazendo $p = 1/2$ e escolhendo três valores diferentes para a (um crítico, um subcrítico e supercrítico), podemos investigar a diferença dos regimes, no que diz respeito os principais aspectos qualitativos de seu comportamento assintótico.

Na Figura 4.23 podemos ver a diferença no cálculo do expoente α . No caso supercrítico (termo

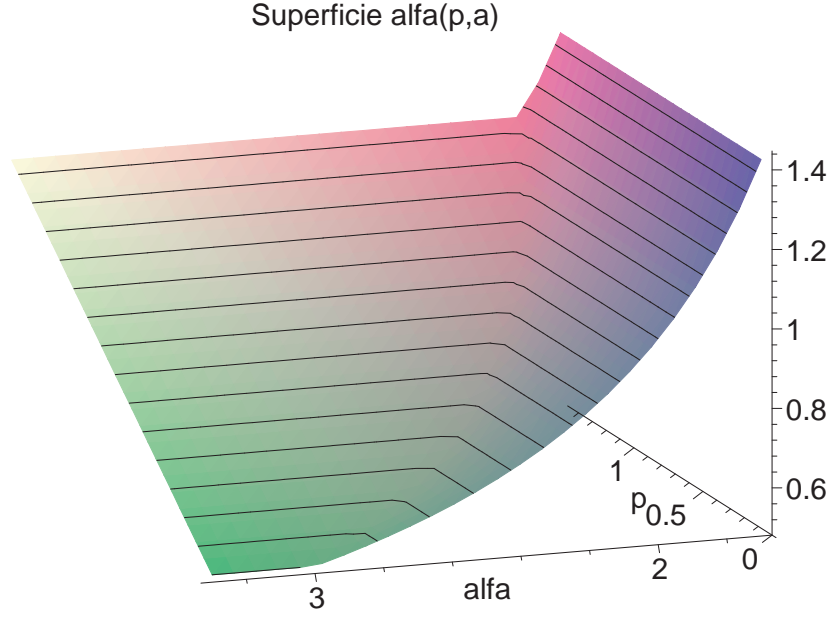


Figura 4.20: Superfície $\alpha(p, a)$ dada por (4.9). As singularidades da superfície correspondem à curva crítica sobre a qual ocorre a transição de fase.

não-linear irrelevante), o expoente de decaimento é determinado por $\alpha = [(p + 1)/2] = 3/4$, enquanto que no caso subcrítico este expoente assume um valor maior. Além disso, quando usamos parâmetros críticos, a convergência (α_n) para $\alpha = [(p + 1)/2] = 3/4$ é muito mais lenta que nos outros casos (apesar de não aparecer na figura, após um número muito maior de iterações podemos ver que a convergência ocorre de fato).

Na Figura 4.24 vemos a convergência do prefator nos três regimes. Para parâmetros na região relevante e irrelevante, o prefator converge rapidamente a um número positivo, enquanto no caso crítico o prefator converge para zero quando $n \rightarrow \infty$. Este fato é devido ao aparecimento de uma correção logarítmica ao comportamento auto-similar, que será discutido logo adiante.

Na Figura 4.25 ilustramos a universalidade do prefator com respeito à condição inicial no caso de perturbações relevantes (a subcrítico). Fixamos $p = 1/2$ e escolhemos três valores distintos de a satisfazendo $a < a_c(p)$. O prefator obtido como $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ depende apenas da escolha de a e não das condições iniciais.

A Figura 4.26 mostra a não-universalidade do prefator no caso da perturbação irrelevante. Para

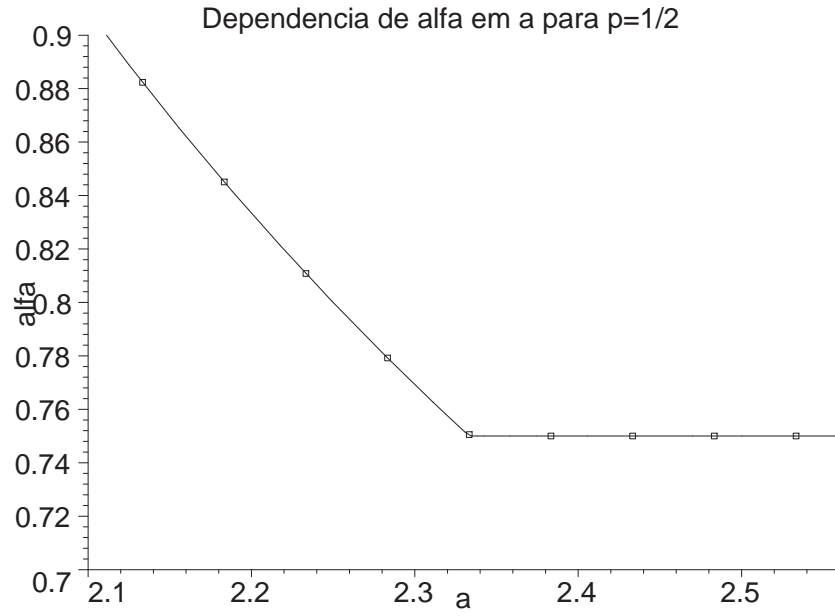


Figura 4.21: Gráfico de $\alpha \times a$ para $p = 1/2$ fixo. Os quadrados representam os valores calculados numericamente e a linha contínua é dada pela equação (4.9).

$p = 1/2$ fixo, escolhemos três valores de $a > a_c(p)$ e três condições iniciais distintas. O prefator obtido é influenciado tanto pela escolha de a quanto da condição inicial.

| a | α teórico | α calculado |
|----------|------------------|--------------------|
| 2.133333 | .882353 | .882353 |
| 2.183333 | .845070 | .845071 |
| 2.233333 | .810811 | .810811 |
| 2.283333 | .779221 | .779221 |
| 2.333333 | .750000 | .750553 |
| 2.383333 | .750000 | .749991 |
| 2.433333 | .750000 | .749991 |
| 2.483333 | .750000 | .749991 |
| 2.533333 | .750000 | .749991 |

Tabela 4.3: Valores de α como uma função de a para $p = 1/2$ fixo. O valor calculado numericamente é comparado com o valor dado pela equação (4.9)

| p | α teórico | α calculado |
|---------|------------------|--------------------|
| .300000 | .750000 | .750000 |
| .350000 | .750000 | .750000 |
| .400000 | .750000 | .750000 |
| .450000 | .750000 | .750001 |
| .500000 | .750000 | .750553 |
| .550000 | .775000 | .774994 |
| .600000 | .800000 | .799996 |
| .650000 | .825000 | .824987 |
| .700000 | .850000 | .849962 |

Tabela 4.4: Valores de α como uma função de p para $a = 7/3$ fixo. O valor calculado numericamente é comparado com o valor dado pela equação (4.9)

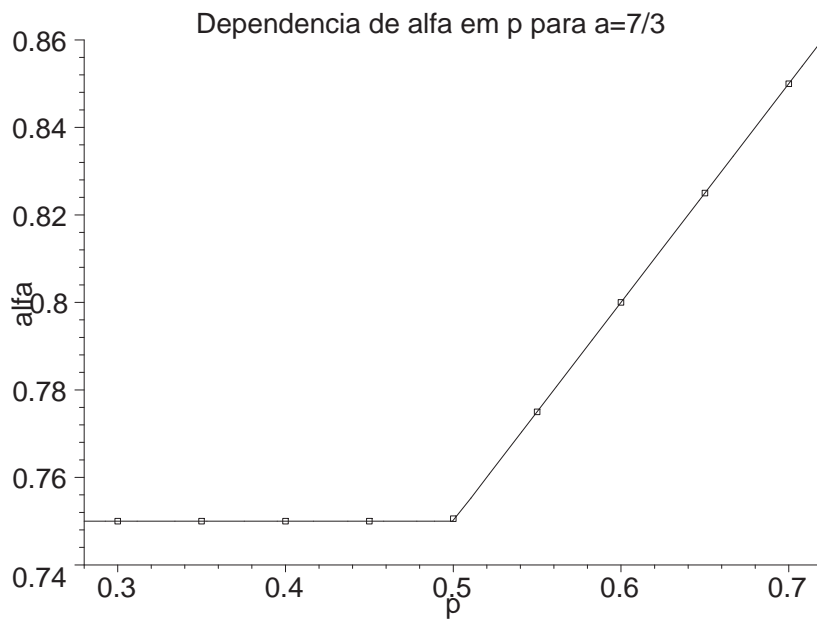


Figura 4.22: Gráfico de $\alpha \times p$ para $a = 7/3$ fixo. Os quadrados representam os valores calculados numericamente e a linha contínua é dada pela equação (4.9).

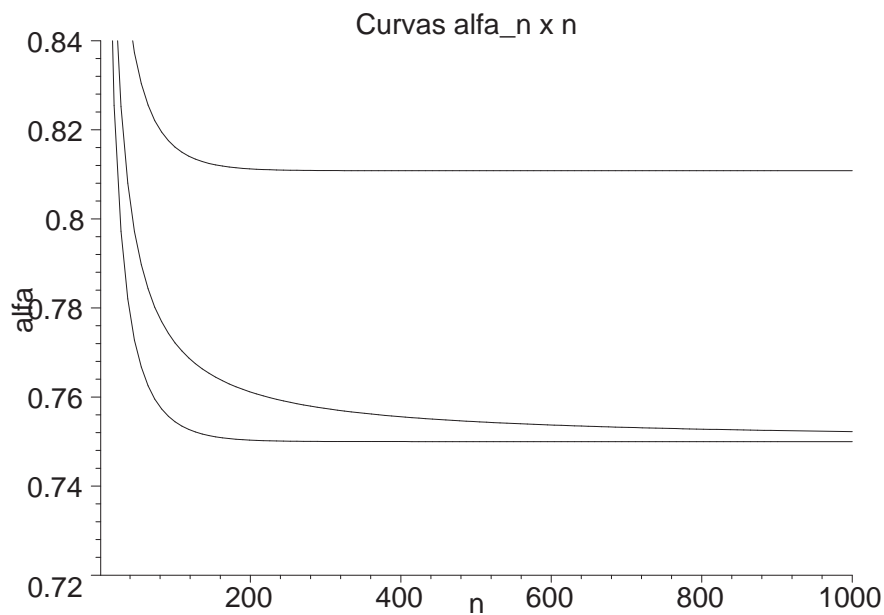


Figura 4.23: Curvas $\alpha_n \times n$ para três regimes distintos. Fixado o parâmetro $p = 1/2$, cada curva foi gerada com um valor de $a < 7/3$, $a = 7/3$ e $a > 7/3$, correspondendo aos regimes não-linear, crítico e linear, respectivamente.

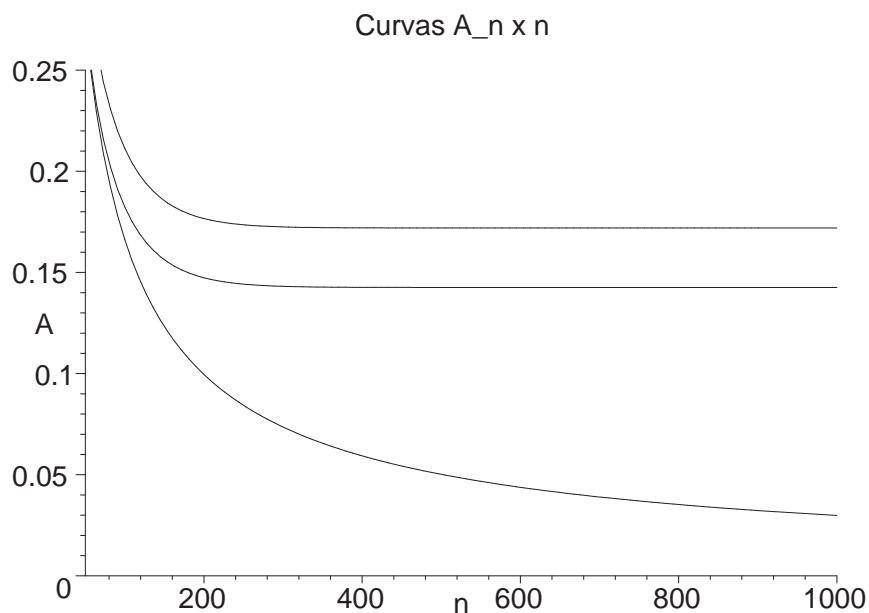


Figura 4.24: Curvas $A_n \times n$ para três regimes distintos. Fixado o parâmetro $p = 1/2$, cada curva foi gerada com um valor de $a < 7/3$, $a = 7/3$ e $a > 7/3$, correspondendo aos regimes não-linear, crítico e linear, respectivamente.

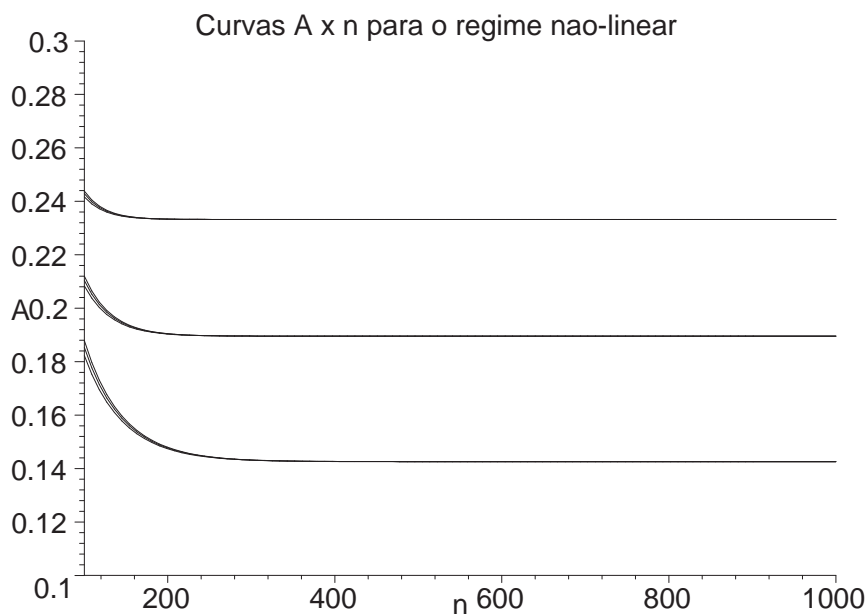


Figura 4.25: Curvas $A_n \times n$ para o regime não-linear, com três valores distintos de a satisfazendo $a < 7/3$ e três condições iniciais distintas, fixado $p = 1/2$. O prefator dado por $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ depende apenas de a .

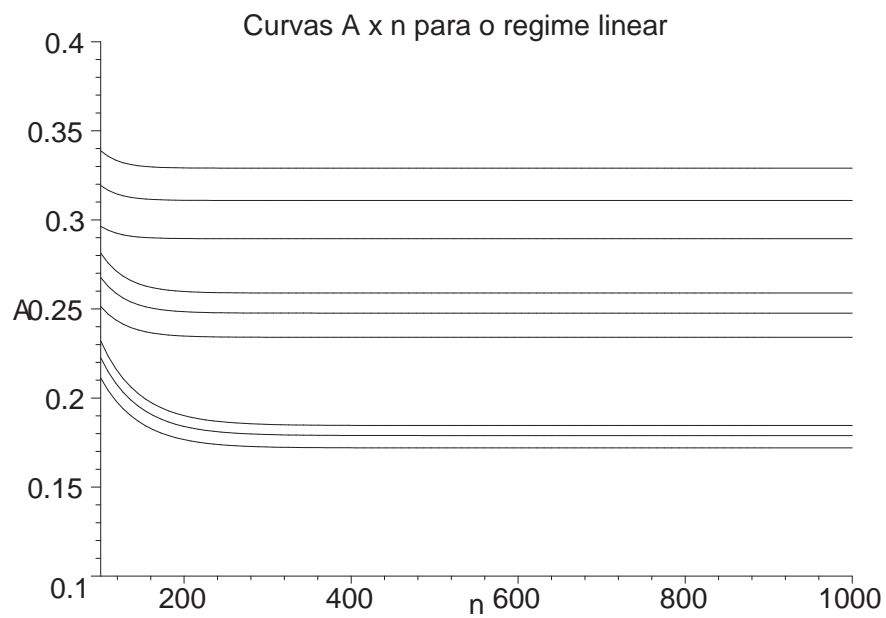


Figura 4.26: Curvas $A_n \times n$ para o regime linear, com três valores distintos de a satisfazendo $a > 7/3$ e três condições iniciais distintas, fixado $p = 1/2$. O prefator dado por $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ depende do parâmetro a e da condição inicial utilizada.

4.3.4 Correções logarítmicas sobre a curva crítica

Para a equação (4.7) com parâmetros sobre a curva crítica, o comportamento assintótico auto-similar esperado sofre uma correção logarítmica:

$$u(x, t) \approx \frac{A}{(t \ln t)^\alpha} \phi\left(\frac{B}{t^\beta} x\right) \quad \text{quando } t \rightarrow \infty, \quad (4.10)$$

onde $\beta = (p + 1)/2$ e $\alpha = (p + 1)/2 = 1/(a - 1)$. Além disso, resultados teóricos dizem que o prefator A não depende da condição inicial, mas apenas da escolha dos parâmetros (p, a) . Lembrando que o algoritmo faz com que $f_n(0) = 1$ no processo construtivo, combinando (4.10) com (3.7) obtemos

$$\ln A_n \approx \ln \frac{A}{L^\alpha} - \alpha \ln n. \quad (4.11)$$

Essa relação diz que o gráfico de $\ln A_n \times \ln n$ se aproxima, para n suficientemente grande, de uma linha reta tendo inclinação dada por $-\alpha$ que intercepta o eixo vertical no ponto $\ln A/L^\alpha$. Neste caso, a universalidade de A traduz-se no fato de que quaisquer condições iniciais dentro de uma classe apropriada dão origem a curvas que são assintóticas à mesma reta e não a retas paralelas.

As afirmações do parágrafo acima foram verificadas para $p = 0$, $p = 1/2$, e $p = 1$. A Figura 4.27 mostra o gráfico de $\ln A_n \times \ln n$ para $p = 1/2$ e três condições iniciais diferentes. A inclinação da reta assintótica é $-\alpha$, sendo utilizado o valor de α calculado pelo RG.

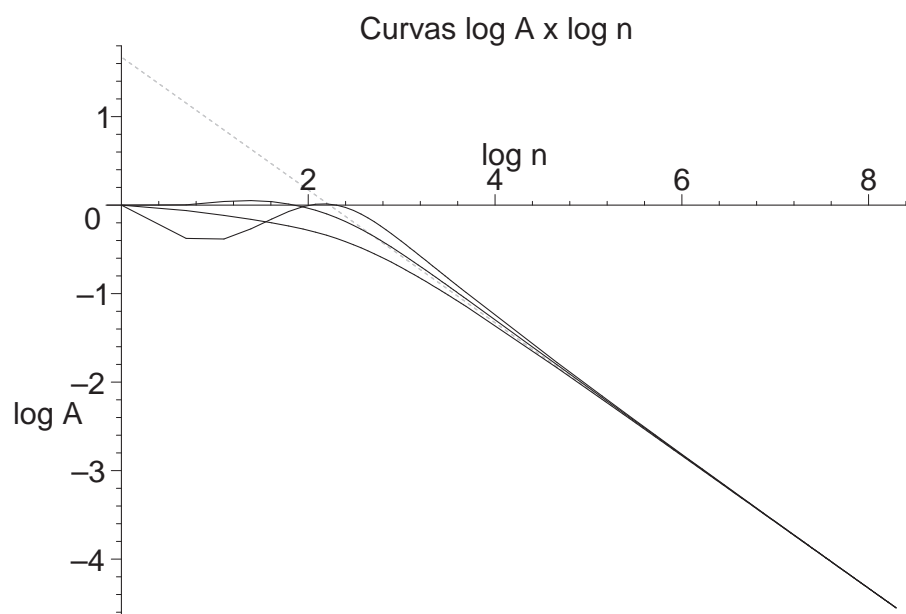


Figura 4.27: Curvas $\ln A_n \times \ln n$ para $p = 1/2$ e $a = 7/3$, com três condições iniciais distintas. A reta pontilhada passa pelo ponto $(\ln A_n, \ln n)$ da última iteração do algoritmo e tem inclinação $-\alpha$, considerando o expoente calculado na última iteração.

Capítulo 5

Teoria de Homogeneização

Neste capítulo vamos apresentar a teoria de homogeneização à qual nos referimos nos capítulos anteriores. A principal idéia na teoria de homogeneização é a de tentar descrever um meio não-homogêneo a partir de seu comportamento *efetivo*. Essa tentativa baseia-se na hipótese de que existe um meio homogêneo cujas propriedades são próximas daquelas do meio real quando medidas em grandes escalas. O processo de “aproximar pela média”, chamado *homogeneização*, substitui uma estrutura complicada em escala microscópica por uma estrutura homogênea assintoticamente equivalente. A teoria que vamos apresentar neste capítulo diz de uma forma matematicamente precisa que a substituição da equação original por outra com coeficiente constante é uma aproximação válida em relação a um certo limite.

Escrevemos esse capítulo com dois objetivos. O primeiro é chegar ao Teorema 5.11 e ao Corolário 5.12, que justificam a substituição do coeficiente não-homogêneo por um homogêneo no estudo do Problema 1 da Introdução. O segundo é apresentar ao leitor um texto auto-contido sobre a teoria de homogeneização, para equações elípticas e parabólicas lineares, em espaços de Sobolev. O conteúdo deste capítulo se baseia no artigo de Papanicolaou [24] e no livro de Jikov et al. [20].

Vamos fazer uso indiscriminado dos resultados básicos da teoria de medida e integração em subconjuntos de \mathbb{R}^m . Serão utilizados também alguns elementos de análise funcional como os conceitos de espaços de Hilbert e de Banach, ou o Lema de Riez. Contudo, não é necessário que o leitor tenha feito um curso de análise funcional desde que tenha algum livro introdutório para consultar.

Na Seção 5.1 vamos apresentar as idéias básicas da técnica de homogeneização e estudar um caso simples em que não são necessários muitos resultados matemáticos mas que, por sua vez, contribuem para uma visão simples e clara do problema de homogeneização.

Na Seção 5.2 vamos definir alguns espaços de Sobolev e suas principais propriedades, trabalhar com seus duais e estudar a equação elíptica linear com condição de contorno periódica. Isso feito, introduzimos um problema auxiliar, que prepara o terreno para o Teorema 5.11, em que uma equação parabólica mais geral do que o Problema 1 linear é estudada.

5.1 Estudo de um problema unidimensional

Nesta seção pretendemos apresentar o estudo de um caso bastante simples com o intuito de dar um enfoque físico e intuitivo da técnica de homogeneização. Por esta razão, optamos por deixar em segundo plano as dificuldades matemáticas (utilizando para isso o recurso de acrescentar mais hipóteses do que o necessário aos problemas), e demos preferência à tentativa de justificar e ilustrar a idéia de homogeneizar um meio heterogêneo.

O problema elíptico linear unidimensional

Considere a equação abaixo, que modela o estado de equilíbrio de um condutor (de calor) unidimensional ao qual aplicamos um gradiente de temperatura V :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[D(x) \frac{du(x)}{dx} \right] = 0, & x \in [-N, N] \\ u(-N) = -VN, \quad u(+N) = +VN \end{cases},$$

onde $N > 0$ é a metade do tamanho do condutor que estamos considerando e $D(x)$ é uma função periódica (de período 1), limitada e satisfaz $\inf_{x \in \mathbb{R}} D(x) > 0$. A função $D(x)$ representa a condutividade térmica no ponto x e V representa o gradiente de temperatura aplicado ao condutor.

O fluxo em um ponto x é dado por $D(x) \frac{du(x)}{dx}$; o fluxo médio, por unidade de gradiente de

temperatura, será denotado por D_N e dado pela fórmula

$$D_N = \frac{1}{V} \left(\frac{1}{2N} \int_{-N}^{+N} D(x) \frac{du(x)}{dx} dx \right).$$

No caso unidimensional, que estamos tratando neste momento, o fluxo $D(x)u_x(x)$ é constante, logo a integral acima é desnecessária. Entretanto, essa representação tem o significado físico de estarmos tomando a média do fluxo. Em dimensões maiores, ao invés de um fluxo constante temos um fluxo com divergente nulo.

Queremos determinar a *condutividade efetiva* D^* , que é definida pela existência do limite

$$D^* = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N.$$

Ressaltando novamente que estamos tratando do caso unidimensional, temos uma fórmula explícita para D_N . Cada equação abaixo é consequência imediata da equação que a precede:

$$\begin{aligned} D_N &= \frac{1}{V} D(x) u_x(x) \quad \forall x \in [-N, N] \\ u_x &= V D_N / D(x) \\ 2V N &= \int_{-N}^{+N} u_x dx = V D_N \int_{-N}^{+N} \frac{1}{D(x)} dx \\ D_N &= \left(\frac{1}{2N} \int_{-N}^{+N} \frac{1}{D(x)} dx \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Como D é periódica, de período 1, por exemplo, a última igualdade implica em

$$D^* = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N = \left(\int_0^1 \frac{1}{D(x)} dx \right)^{-1} = \langle D^{-1} \rangle^{-1}.$$

Uma interpretação física para a fórmula acima é que a resistividade efetiva $(D^*)^{-1}$ é a resistividade média $\langle D^{-1} \rangle$ em um sistema de pequenos resistores em série. Observamos que o mesmo raciocínio pode se aplicar ao caso em que a condutividade D não é periódica ou até mesmo quando é um campo estocástico, exceto pela integral desta última fórmula.

Uma forma equivalente de ver o mesmo problema

O mesmo problema pode ser visto sem que se aumente o tamanho do condutor no limite $N \rightarrow \infty$, como fizemos acima. Podemos ajustar nossa escala de medida ao tamanho do problema e pensar

que, nessa escala, a heterogeneidade é que passa a ter uma oscilação cada vez mais rápida. Isso é feito através de uma mudança de variáveis. Primeiramente fazemos

$$\epsilon = \frac{1}{N}$$

e definimos

$$D^\epsilon(x) = D(x/\epsilon) \quad \text{e} \quad u^\epsilon(x) = \epsilon u(x/\epsilon).$$

A nova equação a ser considerada será

$$\begin{cases} [D^\epsilon(x)u_x^\epsilon(x)]_x = 0 & x \in [-1, 1] \\ u^\epsilon(\pm 1) = \pm 1 \end{cases}$$

e o coeficiente efetivo dado por

$$D^* = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 D^\epsilon(x) \left[\frac{du^\epsilon(x)}{dx} \right] dx.$$

Com essa abordagem obtemos o mesmo valor para D^* .

O problema que vamos considerar em seguida ilustra bem a idéia de que a aproximação do meio heterogêneo pelo meio homogêneo é uma “boa” aproximação.

Um problema de homogeneização

Considere $D \in C^1(\mathbb{R})$ positiva e periódica de período 1. Para cada $\epsilon > 0$ defina $D^\epsilon(x) = D(x/\epsilon)$ e seja u^ϵ a solução de

$$\begin{cases} -[D^\epsilon(x)u_x^\epsilon(x)]_x = f, & x \in [-1, 1] \\ u^\epsilon(\pm 1) = 0 \end{cases}, \quad (5.1)$$

onde $f \in C^1([-1, 1])$.

Seja u^0 a solução do mesmo problema substituindo-se D^ϵ por

$$D^* = \left(\int_0^1 \frac{1}{D(x)} dx \right)^{-1} = \langle D^{-1} \rangle^{-1}. \quad (5.2)$$

O restante desta seção é dedicado ao propósito de oferecer uma prova simples e elegante da seguinte proposição.

Proposição 5.1 Com u^ϵ e u^0 definidas acima, vale o limite

$$u^\epsilon(x) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} u^0(x) \quad (5.3)$$

uniforme em $[-1, 1]$.

A equação unidimensional (5.1) pode ser resolvida explicitamente. Integrando a equação de 0 a x obtemos

$$D^\epsilon(x)u_x^\epsilon(x) = [D^\epsilon(0)u_x^\epsilon(0)] - \int_0^x f(t)dt.$$

Definindo $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, temos

$$u_x^\epsilon(x) = \frac{1}{D^\epsilon(x)}[D^\epsilon(0)u_x^\epsilon(0)] - \frac{1}{D^\epsilon(x)}F(x).$$

Integrando novamente, obtém-se

$$u^\epsilon(x) = u^\epsilon(0) + [D^\epsilon(0)u_x^\epsilon(0)] \int_0^x \frac{1}{D^\epsilon(t)}dt - \int_0^x \frac{F(t)}{D^\epsilon(t)}dt.$$

Definimos $c_1(\epsilon) = [D^\epsilon(0)u_x^\epsilon(0)]$ e $c_2(\epsilon) = u^\epsilon(0)$, donde

$$u^\epsilon(x) = c_2(\epsilon) + c_1(\epsilon) \int_0^x \frac{1}{D^\epsilon(t)}dt - \int_0^x \frac{F(t)}{D^\epsilon(t)}dt. \quad (5.4)$$

A condição de contorno é $u^\epsilon(\pm 1) = 0$. Subtraindo ou somando as equações $u^\epsilon(-1) = 0$ e $u^\epsilon(+1) = 0$ obtemos, respectivamente,

$$c_1(\epsilon) = \left(\int_{-1}^{+1} \frac{1}{D^\epsilon(t)}dt \right)^{-1} \int_{-1}^{+1} \frac{F(t)}{D^\epsilon(t)}dt$$

e

$$c_2(\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \frac{\text{sgn}(t)}{D^\epsilon(t)}F(t)dt - c_1(\epsilon) \int_{-1}^{+1} \frac{\text{sgn}(t)}{D^\epsilon(t)}dt \right),$$

onde $\text{sgn}(0) = 0$ e $\text{sgn}(x) = x/|x|$ para $x \neq 0$.

Como u^0 satisfaz a mesma equação com D^ϵ substituído por D^* , fazemos a mesma substituição em (5.4) para concluir que u^0 será dado por

$$u^0(x) = c_2(0) + c_1(0) \frac{x}{D^*} - \frac{1}{D^*} \int_0^x F(t)dt, \quad (5.5)$$

com

$$c_1(0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} F(t) dt$$

e

$$c_2(0) = \frac{1}{2D^*} \int_{-1}^{+1} \operatorname{sgn}(t) F(t) dt.$$

Valem as seguintes convergências uniformes em $[-1, 1]$:

$$\int_0^x \frac{1}{D^\epsilon(t)} dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x}{D^*} \quad \text{e} \quad \int_0^x \frac{F(t)}{D^\epsilon(t)} dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{D^*} \int_0^x F(t) dt. \quad (5.6)$$

Para provar essas convergências, vamos utilizar uma propriedade geral de funções periódicas, dada pelo lema abaixo. Resultados análogos valem sob condições bem mais gerais, mas com a hipótese de suavidade a demonstração se torna particularmente simples.

Lema 5.2 (Propriedade do Valor Médio) *Seja $F : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , tal que $F(y+1, x) = F(y, x)$ para todos $x \in [a, b]$, $y \in \mathbb{R}$. Então, dados $a', b' \in [a, b]$, $a' < b'$, vale a seguinte limite*

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{a'}^{b'} F(x/\epsilon, x) dx = \int_{a'}^{b'} \bar{F}(x) dx$$

uniforme em relação a a' e b' , onde

$$\bar{F}(x) = \int_0^1 F(y, x) dy.$$

Prova: Considere $G : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$G(y, x) = \int_0^y [F(z, x) - \bar{F}(x)] dz.$$

Temos G de classe C^1 , periódica de período 1 em y , pois é a integral de uma função periódica da qual subtraímos a média; portanto G é limitada. Temos que

$$\partial_1 G(y, x) = F(y, x) - \bar{F}(x).$$

Segue que

$$\int_{a'}^{b'} [F(x/\epsilon, x) - \bar{F}(x)] dx = \int_{a'}^{b'} \partial_1 G(x/\epsilon, x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{a'/\epsilon}^{b'/\epsilon} \partial_1 G(y, \epsilon y) \epsilon dy \\
&= \epsilon \left[\int_{a'/\epsilon}^{b'/\epsilon} [\partial_1 G(y, \epsilon y) + \epsilon \partial_2 G(y, \epsilon y)] dy - \int_{a'/\epsilon}^{b'/\epsilon} \partial_2 G(y, \epsilon y) \epsilon dy \right] \\
&= \epsilon \left[\int_{a'/\epsilon}^{b'/\epsilon} \frac{d}{dy} G(y, \epsilon y) dy - \int_{a'/\epsilon}^{b'/\epsilon} \partial_2 G(y, \epsilon y) \epsilon dy \right] \\
&= \epsilon \left[G(b'/\epsilon, b') - G(a'/\epsilon, a') - \int_{a'}^{b'} \partial_2 G(x/\epsilon, x) dx \right].
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade triangular, temos

$$\left| \int_{a'}^{b'} F(x/\epsilon, x) dx - \int_{a'}^{b'} \bar{F}(x) dx \right| \leq \epsilon \left[2 \max_{[0,1] \times [a,b]} |G(y, x)| + (b-a) \max_{[0,1] \times [a,b]} |\partial_2 G(y, x)| \right],$$

donde temos o limite uniforme desejado. \square

Pela definição de D^* dada por (5.2), a Propriedade do Valor Médio tem como consequência imediata que vale o limite

$$\int_0^x \frac{1}{D^\epsilon(t)} g(t) dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{D^*} \int_0^x g(t) dt$$

uniforme em $[-1, 1]$, onde g é qualquer função em $C^1([-1, 1])$.

Em particular, temos que valem os limites (5.6), uniformemente em $[-1, 1]$. Também valem os limites $c_1(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} c_1(0)$ e $c_2(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} c_2(0)$, separando-se as integrais de $c_2(\epsilon)$ e $c_2(0)$ nos subintervalos $[-1, 0)$ e $(0, 1]$.

Comparando (5.4) e (5.5), temos o limite (5.3) uniforme em $[-1, 1]$ como consequência dos limites mencionados acima.

5.2 Equações diferenciais com coeficientes periódicos

5.2.1 Espaços de Sobolev

Nesta seção Q denotará um conjunto aberto limitado em \mathbb{R}^m . Os conjuntos de funções reais $L^\alpha(Q)$, $1 \leq \alpha \leq +\infty$ são definidos da maneira usual. O conjunto $C_0^\infty(Q)$ é formado pelas funções reais infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Q .

Definição 5.3 (Gradiente Fraco) Uma função $v : Q \rightarrow \mathbb{R}^m$, dada por $v = (v_1, \dots, v_m)$, $v_i \in L^1(Q)$ é chamada gradiente da função $u \in L^1(Q)$ se

$$\int_Q u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x) dx = - \int_Q v_i(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(Q), \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.7)$$

Denotamos o gradiente por ∇u ou $\frac{\partial}{\partial x} u$.

Observe que o gradiente, quando existe, é único q.t.p. e que ∇ é linear, isto é, $\nabla(u_1 + \lambda u_2) = \nabla u_1 + \lambda \nabla u_2$, sempre que ∇u_1 e ∇u_2 existirem. Por exemplo, se $u, v : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por $u(x) = |x|$ q.t.p. e $v(x) = x/|x|$ q.t.p. então v é o gradiente de u no sentido da definição acima. Observe também que se u é diferenciável em algum aberto, então as componentes do gradiente segundo a definição acima coincidem com as respectivas derivadas parciais em quase todo ponto desse aberto.

Denotamos por $\mathbf{L}^2(Q)$ o conjunto $\{p : Q \rightarrow \mathbb{R}^m : p_i \in L^2(Q), i = 1, \dots, m\}$ com produto interno dado por

$$(p, q)_{\mathbf{L}^2} = \int_Q p \cdot q \, dx \quad (5.8)$$

e norma $\|p\|_{\mathbf{L}^2}^2 = (p, p) = \int_Q |p|^2 dx = \|p_1\|_{L^2}^2 + \dots + \|p_m\|_{L^2}^2$.

Proposição 5.4 $\mathbf{L}^2(Q)$ é um espaço de Hilbert.

Prova: A verificação de que (5.8) define um produto interno é direta. Resta então mostrar que $\mathbf{L}^2(Q)$ é completo. É claro que $\|p_i\|_{L^2} \leq \|p\|_{\mathbf{L}^2}$ para $i = 1, \dots, m$ e para todo $p \in \mathbf{L}^2$. Seja (p^n) uma sequência de Cauchy em $\mathbf{L}^2(Q)$. Temos que (p_i^n) são sequências de Cauchy para $i = 1, \dots, m$ e, como $L^2(Q)$ é completo, temos que $p_i^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} p_i \in L^2(Q)$. Tomando $p = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbf{L}^2(Q)$, temos que $\|p^n - p\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \|p_1^n - p_1\|_{L^2}^2 + \dots + \|p_m^n - p_m\|_{L^2}^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, logo $p^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{L}^2} p$. Portanto, $\mathbf{L}^2(Q)$ é completo. \square

O espaço de Sobolev $H^1(Q)$ é definido por

$$H^1(Q) = \{u \in L^2(Q) : \text{existe } \nabla u \text{ e este está em } \mathbf{L}^2(Q)\}.$$

Observe que faz sentido falar em gradiente de u na definição acima, pois $L^2(Q) \subset L^1(Q)$ uma vez que Q é limitado. É claro que $H^1(Q)$ é um espaço vetorial e, sobre ele, podemos definir a forma bilinear

$$(u_1, u_2) = \int_Q (u_1 u_2 + \nabla u_1 \cdot \nabla u_2) \, dx. \quad (5.9)$$

É fácil verificar que essa forma bilinear define um produto escalar e que esse produto escalar gera a seguinte norma

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\|u\|_0^2 + \|u\|_1^2}, \quad (5.10)$$

onde $\|u\|_0^2 = \int_Q u^2 dx = \|u\|_{L^2}^2$ e $\|u\|_1^2 = \int_Q |\nabla u|^2 dx = \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}^2$. Mostraremos, a seguir, que

Proposição 5.5 $H^1(Q)$, com produto interno dado por (5.9), é um espaço de Hilbert.

Prova: É suficiente mostrar que $H^1(Q)$, com a norma $\|u\|_{H^1} = \sqrt{(u, u)}$, é completo pois, como já observamos, (5.9) define de fato um produto interno. Seja $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy em $H^1(Q)$. Ponha $v^n = \nabla u^n$, $n \in \mathbb{N}$. Como $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$ e $\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|u\|_{H^1}$ para toda $u \in H^1(Q)$, temos que (u^n) e (v^n) são seqüências de Cauchy em $L^2(Q)$ e $\mathbf{L}^2(Q)$, respectivamente. Mas esses espaços são completos, logo $u^n \rightarrow u \in L^2(Q)$ e $v^n \rightarrow v \in \mathbf{L}^2(Q)$ quando $n \rightarrow \infty$. Basta então mostrar que $v = \nabla u$, pois neste caso teremos $u \in H^1(Q)$ e, como $\|u^n - u\|_{H^1}^2 = \|u^n - u\|_{L^2}^2 + \|v^n - v\|_{\mathbf{L}^2}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, teremos também que $u^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H^1} u$. Seja $\phi \in C_0^\infty(Q)$. Se $\phi = 0$ temos (5.7) trivialmente; assuma então que $\phi \neq 0$. Seja $\epsilon > 0$. Faça $M = \|\phi\|_{H^1} > 0$ e tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|u - u^n\|_{L^2} + \|v - v^n\|_{\mathbf{L}^2} < \epsilon/M$. Para cada $i = 1, \dots, m$, temos por Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} \left| \int_Q (u - u^n) \frac{\partial}{\partial x_i} \phi dx + \int_Q (v_i - v_i^n) \phi dx \right| &\leq \|u - u^n\|_{L^2} \|\nabla \phi\|_{\mathbf{L}^2} + \|v - v^n\|_{\mathbf{L}^2} \|\phi\|_{L^2} \leq \\ &\leq (\|u - u^n\|_{L^2} + \|v - v^n\|_{\mathbf{L}^2}) M < \epsilon. \end{aligned}$$

Agora note que, pela definição de gradiente, vale

$$\int_Q u^n \frac{\partial}{\partial x_i} \phi dx + \int_Q v_i^n \phi dx = 0.$$

Logo,

$$\left| \int_Q u \frac{\partial}{\partial x_i} \phi dx + \int_Q v_i \phi dx \right| < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos que u e v satisfazem (5.7) e, portanto, $v = \nabla u$. \square

A desigualdade de Poincaré, que enunciamos abaixo¹, será usada mais adiante no estudo da equação de Poisson com condição de contorno periódica.

Teorema 5.6 (Desigualdade de Poincaré) *Existe $c_0 > 0$, que depende apenas de $Q \subset \mathbb{R}^m$, tal que*

$$\int_Q u^2 dx \leq c_0 \left[\left(\int_Q u dx \right)^2 + \int_Q |\nabla u|^2 dx \right], \quad \forall u \in H^1(Q).$$

Um campo de vetores $v \in \mathbf{L}^2(Q)$ é chamado de campo *potencial*, ou campo *gradiente*, se $v = \nabla u$ para algum $u \in H^1(Q)$.

Dado $p \in \mathbf{L}^2(Q)$, definimos o *divergente* de p como sendo o funcional linear dado por

$$\operatorname{div} p \cdot \phi = (\operatorname{div} p, \phi) = - \int_Q (p \cdot \nabla \phi) dx, \quad \phi \in H^1(Q).$$

A desigualdade de Cauchy-Schwartz em $\mathbf{L}^2(Q)$ implica que $\operatorname{div} p$ é contínua, pois

$$(\operatorname{div} p, \phi) \leq \|p\|_{\mathbf{L}^2} \|\nabla \phi\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|p\|_{\mathbf{L}^2} \|\phi\|_{H^1}.$$

Convém observar que, para funções diferenciáveis em um aberto de Q , as definições de divergente e campo potencial coincidem com aquelas definidas no cálculo vetorial.

Outro exemplo de funcionais lineares e contínuos em $H^1(Q)$ são aqueles dados por $u \mapsto \int_Q f u dx$, onde f é um elemento de $L^2(Q)$.

Espaços de funções periódicas

Denotamos por \square o paralelepípedo em \mathbb{R}^m , dado por $\square = (0, l_1) \times \cdots \times (0, l_m)$. Dizemos que uma função definida em \mathbb{R}^m é periódica, de período \square , se ela for uma função periódica em cada uma das variáveis x_1, \dots, x_m , e com períodos l_1, \dots, l_m , respectivamente. Neste caso, também dizemos que a função é \square -periódica.

¹A prova da Desigualdade de Poincaré pode ser encontrada em [12].

Se $g(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função \square -periódica e Lebesgue-integrável em \square , definimos o *valor médio* de g por

$$\langle g \rangle = \frac{1}{|\square|} \int_{\square} g(x) dx,$$

onde $|\square| = l_1 l_2 \dots l_m$ é o volume do paralelepípedo \square .

A seguir, definiremos alguns espaços de funções que estarão relacionados, de alguma maneira, com as funções de \mathbb{R}^m em \mathbb{R} que sejam \square -periódicas. Assim, o símbolo \square representa não apenas o domínio dado pelo hipercubo mas também que estamos tratando de funções periódicas. Em alguns casos, essa diferença vai além do domínio de definição das funções do espaço em questão, pois quando tratamos de espaços que levam em consideração a derivada das funções, estaremos impondo condições na fronteira deste domínio.

Por exemplo, dado $p \in [1, +\infty)$, denotamos por $L^p(\square)$ às funções $g(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ que sejam \square -periódicas e tais que a norma

$$\|g\|_p = \langle |g|^p \rangle^{1/p}$$

seja finita. É claro que $L^2(\square)$ com produto interno $(u, v) = \langle uv \rangle$ é um espaço de Hilbert. Neste caso, existe uma bijeção direta entre $L^2(Q)$ e $L^2(\square)$ com $Q = \square$, ou seja, os espaços são essencialmente os mesmos, exceto porque as funções do primeiro espaço têm que ser estendidas de forma \square -periódica para obtermos elementos do segundo.

Denotamos por $C^\infty(\square)$ o conjunto das funções de \mathbb{R}^m em \mathbb{R} , \square -periódicas e infinitamente diferenciáveis. Definimos $H^1(\square)$ como sendo o completamento de $C^\infty(\square)$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{H^1}$. Em $H^1(\square)$ definimos o produto interno $(u, v) = \langle uv + \nabla u \cdot \nabla v \rangle$ e norma $\|u\|_{H^1(\square)} = \sqrt{(u, u)}$.

Observe que a diferença entre funções de $H^1(Q)$ e $H^1(\square)$ não reside simplesmente no domínio em que estão definidas, mesmo quando $Q = \square$. De fato, se $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ então claramente $\phi|_Q \in C^\infty(Q)$. Em particular, se $\phi \in C^\infty(\square)$, vale $\phi|_Q \in C^\infty(Q)$. Entretanto, a recíproca é falsa: se estendemos uma função $\phi \in C^\infty(Q)$ para todo o \mathbb{R}^m de forma \square -periódica, em geral não obtemos uma função de classe C^∞ , pois não temos qualquer informação sequer sobre a continuidade de ϕ na fronteira de \square – a função e suas derivadas teriam que “colar” nesta fronteira. O ponto aqui é que as funções de $H^1(Q)$ cujas extensões \square -periódicas estão em $H^1(\square)$ são somente

aquelas que podem ser arbitrariamente aproximadas em $H^1(Q)$ por funções de $C^\infty(\square)$. Podemos então pensar que $H^1(\square)$ é, em certo sentido, um subespaço fechado de $H^1(Q)$.

De forma análoga ao que ocorre em $H^1(Q)$, temos que qualquer $f \in L^2(\square)$ define um funcional linear contínuo em $H^1(\square)$ dado por $(f, u) = \langle fu \rangle \ \forall u \in H^1(\square)$. Da mesma forma, se $g \in \mathbf{L}^2(\square)$, então o funcional $\text{div } g$, dado por $(\text{div } g, u) = -\langle g \cdot \nabla u \rangle$, é linear e contínuo em $H^1(\square)$. Uma consequência disso é que $u \mapsto \langle u \rangle$ é um funcional contínuo em $H^1(\square)$ e $u \mapsto \langle \nabla u \rangle$ é uma aplicação contínua de $H^1(\square)$ em \mathbb{R}^m .

Definimos também o espaço

$$\mathbf{L}_{\text{pot}}^2(\square) = \{f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m : \exists p \in \mathbb{R}^m, u \in H^1(\square) \text{ tais que } f = p + \nabla u\}.$$

Claramente $\mathbf{L}_{\text{pot}}^2(\square)$ é um espaço vetorial. Na verdade este espaço é também de Hilbert, mas não vamos utilizar este fato.

Proposição 5.7 *Todo campo de vetores $v \in \mathbf{L}_{\text{pot}}^2(\square)$ é escrito como $v = \langle v \rangle + \nabla u$, $u \in H^1(\square)$.*

Prova: Primeiramente escrevemos $v = p + \nabla u$, $p \in \mathbb{R}^m, u \in H^1(\square)$, donde $\langle v \rangle = p + \langle \nabla u \rangle$. O resultado desejado segue do fato de que $\langle \nabla u \rangle = 0 \ \forall u \in H^1(\square)$.

Com efeito, se $u \in H^1(\square)$, temos que existe uma sequência (ϕ^n) em $C^\infty(\square)$ tal que $\phi^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H^1} u$, e, como $u \mapsto \langle \nabla u \rangle$ é contínua, temos que $\langle \nabla \phi^n \rangle \rightarrow \langle \nabla u \rangle$.

Agora observe que, para qualquer função $\phi \in C^\infty(\square)$, vale

$$\int_0^{l_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \, dx_i = \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, l_i, x_{i+1} \dots x_m) - \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1} \dots x_m) = 0$$

e, pelo Teorema de Fubini aplicado à integral múltipla em $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \right\rangle$, temos que $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \right\rangle = 0$.

Repetindo esse argumento para $i = 1, \dots, m$, temos que $\langle \nabla \phi \rangle = 0$, completando a prova. \square

5.2.2 Lema de Lax-Milgram

Seja V um espaço de Hilbert e $a(u, v) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional bilinear. Suponha que a seja *limitado*, no sentido de que

$$a(u, v) \leq \nu_2 \|u\|_V \|v\|_V \quad (5.11)$$

para todo $u, v \in V$, onde $\nu_2 > 0$. Suponha também que a seja *coercivo*, isto é,

$$a(u, u) \geq \nu_1 \|u\|_V^2, \quad (5.12)$$

para todo $u \in V$, onde $\nu_1 > 0$.

Seja V^* o conjunto dos funcionais lineares e contínuos de V em \mathbb{R} . Para cada $u \in V$, a forma linear $v \mapsto a(u, v)$ é contínua e, portanto, representa um elemento de V^* , que denotaremos por Au . É claro que o operador $A : V \rightarrow V^*$ que leva u em Au é linear e satisfaz

$$(Au, v) = a(u, v).$$

onde (\cdot, \cdot) denota o produto escalar em V . Dada $f \in V^*$, considere a equação em u :

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V. \quad (5.13)$$

isto é, dado $f \in V^*$, queremos resolver $Au = f$, com $u \in V$.

Teorema 5.8 (Lema de Lax-Milgram) *O problema (5.13) tem uma única solução u , que satisfaz*

$$\nu_1 \|u\|_V \leq \|f\|_{V^*} \leq \nu_2 \|u\|_V. \quad (5.14)$$

Em outras palavras, uma forma bilinear limitada e coerciva define um isomorfismo entre V e V^ .*

Prova: Seja $f \in AV \subset V^*$ e seja $u \in V$ tal que $Au = f$. Por (5.12) temos

$$\nu_1 \|u\|_V^2 \leq (Au, u) = (f, u) \leq \|f\|_{V^*} \|u\|_V,$$

donde segue a primeira desigualdade de (5.14). Daí temos que A é injetivo, pois $Au = Av$ implica $A(u - v) = 0$, logo $\|u - v\|_V \leq 0$. Da injetividade de A segue a unicidade de soluções, quando as

mesmas existirem. Ainda supondo a existência de soluções, a segunda desigualdade em (5.14) é obtida de (5.11) pois, dado qualquer $v \in V$, temos

$$|(f, v)| = |(Au, v)| = |a(u, v)| \leq \nu_2 \|u\|_V \|v\|_V.$$

Resta mostrar que $AV = V^*$. Das desigualdades acima segue que $A : V \rightarrow AV \subset V^*$ é um isomorfismo, e seqüências de Cauchy em AV são imagens de seqüências de Cauchy em V , que convergem porque V é completo. Portanto, AV é fechado em V^* .

Agora seja $f \in AV^\perp$. Pelo Lema de Riez, existe um único $z \in V$ tal que $(f, v) = (z, v) \forall v \in V$. Temos que $(Au, z) = (Au, f) = 0 \forall u \in V$. Tomando $u = z$ temos $(Az, z) = 0$ e, por (5.12), $z = 0$, logo $f = 0$. Como $f \in AV^\perp$ é arbitrário, temos que $AV^\perp = \{0\}$. Pelo Teorema da Projeção Ortogonal em Espaços de Hilbert, $\overline{AV} = V^*$ mas, como AV é fechado, segue que $AV = V^*$. \square

5.2.3 O problema periódico

Para tornar o texto mais limpo, vamos assumir, daqui em diante, que estaremos tratando da soma de 1 até m sempre que os índices i, j ou k aparecerem repetidos, a não ser que esteja explícito o contrário.

Escrevemos $\mathcal{A}(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^m$ para denotar uma matriz cujos elementos $a_{ij} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ são funções mensuráveis e limitadas. Fixado $x \in \mathbb{R}^m$ e dados $\xi, \eta \in \mathbb{R}^m$, definimos os produtos $(\mathcal{A}\xi)_i = a_{ij}\xi_j$, $(\xi\mathcal{A})_j = \xi_i a_{ij}$. Escrevemos também $\eta\mathcal{A}\xi = \eta(\mathcal{A}\xi) = (\eta\mathcal{A})\xi = \eta_i \mathcal{A}_{ij}\xi_j$.

Definimos

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \sup_{\xi, \eta \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}} \frac{|\xi\mathcal{A}(x)\eta|}{|\xi||\eta|},$$

de forma que

$$|\xi\mathcal{A}(x)\eta| \leq \|\mathcal{A}\| |\xi||\eta| \quad \forall x, \xi, \eta \in \mathbb{R}^m.$$

Uma vez que os elementos de \mathcal{A} satisfazem $|a_{ij}(x)| \leq M_{ij}$, temos que $\|\mathcal{A}\| < \infty$ e $\sum_{i,j} M_{ij}$ é uma cota superior para $\|\mathcal{A}\|$.

Daqui em diante, vamos assumir que \mathcal{A} sempre satisfaz a *condição de elipticidade*

$$\xi \mathcal{A}(x) \xi \geq \nu_1 |\xi|^2, \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^m,$$

para algum $\nu_1 > 0$. Dizemos também neste caso que \mathcal{A} é *uniformemente elíptica*.

Considere a seguinte equação diferencial

$$\operatorname{div}(\mathcal{A} \nabla u) = -f_0 + \operatorname{div} f,$$

onde $f_0 \in L^2(\square)$ e $f \in \mathbf{L}^2(\square)$.

Diremos que $u \in H^1(\square)$ é uma *solução fraca* da equação acima se u satisfizer

$$\langle \nabla \phi \cdot \mathcal{A} \nabla u \rangle = \langle f_0 \phi \rangle + \langle \nabla \phi \cdot f \rangle, \quad \forall \phi \in H^1(\square). \quad (5.15)$$

Mostraremos agora que o problema acima possui solução e a mesma é única no sentido de que duas soluções diferem por uma função constante, desde que $\langle f_0 \rangle = 0$.

Proposição 5.9 *O problema (5.15) possui solução $u \in H^1(\square)$ se, e somente se, $\langle f_0 \rangle = 0$. Neste caso, tal solução é única no sentido de que $u - v$ é constante para qualquer outra solução v . Em particular, existe uma única solução satisfazendo $\langle u \rangle = 0$.*

Prova: Suponha que existe uma solução $u \in H^1(\square)$. Fazendo $\phi(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}^m$, temos $\nabla \phi = 0$ e $\phi \in H^1(\square)$. Substituindo ϕ em (5.15), temos $\langle f_0 \rangle = 0$.

Reciprocamente, suponha que $\langle f_0 \rangle = 0$. Se u é uma solução então $u + c$ é também solução para qualquer $c \in \mathbb{R}$, uma vez que somente ∇u aparece em (5.15). Assim, não é possível termos unicidade mais forte do que a do enunciado acima. Por outro lado, suponha que u, v são duas soluções do problema e escreva $u = \langle u \rangle + \tilde{u}$ e $v = \langle v \rangle + \tilde{v}$. Temos que \tilde{u} e \tilde{v} são também soluções e satisfazem $\langle \tilde{u} \rangle = \langle \tilde{v} \rangle = 0$. Como $u - v = \langle u - v \rangle + (\tilde{u} - \tilde{v})$, para que $u - v$ seja constante basta mostrar que $\tilde{u} = \tilde{v}$, ou seja, basta mostrar que existe uma única solução u satisfazendo $\langle u \rangle = 0$.

Para isso, defina $V = \{u \in H^1(\square) : \langle u \rangle = 0\}$, subespaço de $H^1(\square)$. V é fechado porque $u \mapsto \langle u \rangle$ é contínua; logo V é um espaço de Hilbert. Considere o funcional bilinear $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dado

por $a(u, \phi) = \langle \nabla \phi \cdot \mathcal{A} \nabla u \rangle$. Vale

$$a(u, u) = \langle \nabla u \cdot \mathcal{A} \nabla u \rangle \geq \langle \nu_1 |\nabla u|^2 \rangle = \nu_1 \frac{1}{|\square|} \int_{\square} |\nabla u|^2 dx,$$

onde ν_1 é a constante da condição de elipticidade de \mathcal{A} . Da Desigualdade de Poincaré segue que

$$c_0 \int_{\square} |\nabla u|^2 dx \geq \int_{\square} u^2 dx,$$

uma vez que $\langle u \rangle = 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned} a(u, u) &\geq \frac{\nu_1}{(1 + c_0)|\square|} (1 + c_0) \int_{\square} |\nabla u|^2 dx \\ &\geq \frac{\nu_1}{(1 + c_0)|\square|} \left(\int_{\square} |\nabla u|^2 dx + \int_{\square} u^2 dx \right) \\ &= \frac{\nu_1}{(1 + c_0)} \|u\|_V^2, \end{aligned}$$

donde concluimos que a é coercivo.

Sejam $u, v \in V$. Temos

$$|a(v, u)| = |\langle \nabla u \cdot \mathcal{A} \nabla v \rangle| \leq \langle |\nabla u \cdot \mathcal{A} \nabla v| \rangle \leq \|\mathcal{A}\| \langle |\nabla u| |\nabla v| \rangle,$$

donde

$$|a(v, u)|^2 \leq \|\mathcal{A}\|^2 \langle |\nabla u| |\nabla v| \rangle^2 \leq \|\mathcal{A}\|^2 \langle |\nabla u|^2 \rangle \langle |\nabla v|^2 \rangle,$$

logo $|a(v, u)| \leq \|\mathcal{A}\| \|u\|_V \|v\|_V$. Portanto, a é limitado.

Considere o funcional linear $\phi \mapsto \langle f_0 \phi \rangle + \langle f \cdot \nabla \phi \rangle$, definido em V . Esse funcional é contínuo, pois sua primeira parte é dada por um elemento $f_0 \in L^2(\square)$ e sua segunda parte é o divergente de $-f \in \mathbf{L}^2(\square)$. Pelo Lema de Lax-Milgram, existe um único $u \in V$ tal que $a(u, \phi) = \langle \nabla \phi \cdot \mathcal{A} \nabla u \rangle = \langle f_0 \phi \rangle + \langle f \cdot \nabla \phi \rangle$ para toda $\phi \in V$. Agora seja $\phi \in H^1(\square)$. Temos $\tilde{\phi} = \phi - \langle \phi \rangle \in V$ e $\nabla \tilde{\phi} = \nabla \phi$. Logo, $\langle \nabla \phi \cdot \mathcal{A} \nabla u \rangle = \langle \nabla \tilde{\phi} \cdot \mathcal{A} \nabla u \rangle = \langle f_0 \tilde{\phi} \rangle + \langle f \cdot \nabla \tilde{\phi} \rangle = \langle f_0(\phi - \langle \phi \rangle) \rangle + \langle f \cdot \nabla \phi \rangle = \langle f_0 \phi \rangle - \langle f_0 \langle \phi \rangle \rangle + \langle f \cdot \nabla \phi \rangle = \langle f_0 \phi \rangle + \langle f \cdot \nabla \phi \rangle$, a última igualdade valendo porque estamos assumindo que $\langle f_0 \rangle = 0$. Portanto, (5.15) vale para toda $\phi \in H^1(\square)$. \square

5.2.4 Um problema periódico auxiliar

Vamos considerar o problema

$$\operatorname{div}(\mathcal{A}v) = 0, \quad v \in \mathbf{L}_{\text{pot}}^2(\square), \quad \langle v \rangle = \lambda \in \mathbb{R}^m. \quad (5.16)$$

Todo elemento de $\mathbf{L}_{\text{pot}}^2(\square)$ é escrito como $v = \lambda + \nabla u$, $u \in H^1(\square)$, sendo $\lambda = \langle v \rangle$. Assim, obtemos o problema abaixo para u :

$$\operatorname{div}(\mathcal{A}(\lambda + \nabla u)) = 0, \quad u \in H^1(\square).$$

Podemos reescrever o problema acima na forma (5.15) com $f = -\mathcal{A}\lambda$ e $f_0 = 0$. Pela Proposição 5.9, existe uma única solução u do problema acima, a menos de adição de uma constante. Como v depende apenas de ∇u , adição de constante em u não altera a solução v , logo v é única. Em outras palavras, para cada $\lambda \in \mathbb{R}^m$, o problema (5.16) possui uma única solução $v \in \mathbf{L}_{\text{pot}}^2(\square)$.

Por outro lado, $v \mapsto \operatorname{div}(\mathcal{A}v)$ é uma aplicação linear, logo seu núcleo é um subespaço vetorial. Assim, se v e w são duas soluções arbitrárias, isto é, $\operatorname{div}(\mathcal{A}v) = \operatorname{div}(\mathcal{A}w) = 0$, e $c \in \mathbb{R}$ é um escalar arbitrário, temos $\operatorname{div}(\mathcal{A}(v + cw)) = 0$ e $\langle v + cw \rangle = \langle v \rangle + c \langle w \rangle = \lambda + c\xi$, onde $\lambda = \langle v \rangle$ e $\xi = \langle w \rangle$. Devido à unicidade da solução de (5.16) para cada parâmetro λ fixo, podemos tomar o caminho inverso, ou seja, dados $\lambda, \xi \in \mathbb{R}^m$ e $c \in \mathbb{R}$ arbitrários, temos que a solução do problema (5.16) com parâmetro $\lambda + c\xi$ é $v + cw$. Assim, a solução u depende linearmente de λ .

Portanto, $\langle \mathcal{A}v \rangle$ depende linearmente de λ e, conseqüentemente, pode ser representada por

$$\langle \mathcal{A}v \rangle = \mathcal{A}^0 \lambda, \tag{5.17}$$

onde \mathcal{A}^0 é uma matriz real com elementos constantes.

O problema periódico auxiliar e a determinação dos elementos da matriz \mathcal{A}^0 em termos de $\mathcal{A}(x)$ é de importância central no estudo dos problemas homogeneizados – veja as seções subseqüentes.

Vamos então tentar encontrar os elementos a_{ij}^0 de $\mathcal{A}^0 = (a_{ij}^0)_{i,j=1}^m$. Seja e^1, \dots, e^m a base canônica de \mathbb{R}^m . Para cada $k = 1, \dots, m$, a solução de (5.16) com $\lambda = e^k$ é da forma $v = e^k + \nabla N_k$, $N_k \in H^1(\square)$. Temos

$$a_{ij}^0 = e^i \cdot \mathcal{A}^0 e^j = \langle e^i \cdot \mathcal{A}v \rangle = \langle e^i \cdot \mathcal{A}(e^j + \nabla N_j) \rangle = \langle a_{ij} + e^i \cdot \mathcal{A} \nabla N_j \rangle,$$

logo

$$a_{ij}^0 = \langle a_{ij} \rangle + \left\langle a_{ik} \frac{\partial N_j}{\partial x_k} \right\rangle. \tag{5.18}$$

Por definição, N_k é a solução de

$$\operatorname{div}(\mathcal{A}(e^k + \nabla N_k)) = 0, \quad N_k \in H^1(\square),$$

ou, no caso de \mathcal{A} suave:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial N_k}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ik}). \quad (5.19)$$

Proposição 5.10 *A matriz \mathcal{A}_0 é elíptica. Além disso, se $\mathcal{A}(x)$ é simétrica para todo x , então \mathcal{A}^0 é simétrica.*

Prova: Segue de (5.16) que

$$\nabla \phi \perp \mathcal{A}v \quad \forall \phi \in H^1(\square).$$

Em particular, $\mathcal{A}v \perp (v - \lambda)$, logo $\langle v \mathcal{A}v \rangle = \langle \lambda \mathcal{A}v \rangle$. Disso segue que

$$\lambda \cdot \mathcal{A}^0 \lambda = \lambda \cdot \langle \mathcal{A}v \rangle = \langle \lambda \cdot \mathcal{A}v \rangle = \langle v \cdot \mathcal{A}v \rangle \geq \nu_1 \langle |v|^2 \rangle \geq \nu_1 |\langle v \rangle|^2 = \nu_1 |\lambda|^2,$$

ou seja, \mathcal{A}^0 é elíptica.

Para provar a segunda parte, consideramos o problema análogo

$$\operatorname{div}(w\mathcal{A}) = 0, \quad w \in \mathbf{L}_{\text{pot}}^2(\square), \quad \langle w \rangle = \xi \in \mathbb{R}^m, \quad (5.20)$$

cujas únicas soluções w dependem linearmente de ξ , e definimos a matriz constante \mathcal{C}^0 por

$$\langle w\mathcal{A} \rangle = \xi \mathcal{C}^0. \quad (5.21)$$

Do mesmo argumento de ortogonalidade, segue que

$$\mathcal{A}v \perp (w - \xi) \quad \text{e} \quad w\mathcal{A} \perp (v - \lambda),$$

e, conseqüentemente,

$$\xi \mathcal{A}^0 \lambda = \xi \langle \mathcal{A}v \rangle = \langle \xi \mathcal{A}v \rangle = \langle w \mathcal{A}v \rangle = \langle w \mathcal{A} \lambda \rangle = \langle w \mathcal{A} \rangle \lambda = \xi \mathcal{C}^0 \lambda.$$

A igualdade acima vale para todos $\lambda, \xi \in \mathbb{R}^m$. Segue que $\mathcal{A}^0 = \mathcal{C}^0$. Se definimos \mathcal{C}^0 utilizando \mathcal{A}^T ao invés de \mathcal{A} , obtemos $(\mathcal{A}^0)^T$, implicando na seguinte propriedade: $(\mathcal{A}^0)^T = (\mathcal{A}^T)^0$. Em particular, quando $\mathcal{A}(x)$ é simétrica para todo x , temos \mathcal{A}^0 simétrica. \square

5.2.5 Homogeneização de equações parabólicas

Nesta seção oferecemos uma prova construtiva para o Teorema 5.11 utilizando o método conhecido como *método de expansão assintótica*.

Este método é comum no estudo teórico de sistemas físicos e consiste em considerar formalmente a seguinte aproximação para u^ϵ :

$$u^\epsilon(x, t) \approx u^0(x, t) + \epsilon u_1(x, y, t) + \epsilon^2 u_2(x, y, t) + \epsilon^3 u_3(x, y, t) + \cdots,$$

onde $y = \epsilon^{-1}x$, as funções u_1, u_2, u_3, \dots são periódicas em y e não dependem de ϵ e a função u_0 depende apenas de x e t .

A idéia do método é fazer com que o truncamento da expansão acima até o n -ésimo termo, que denotaremos por u_n^ϵ , por um lado satisfaça “aproximadamente” a equação diferencial que estamos considerando e por outro lado seja bem aproximado pelo seu primeiro termo $u_0(x, t)$, que não depende de ϵ direta- nem indiretamente.

Na prova que apresentamos abaixo vamos considerar a aproximação até segunda ordem em ϵ , dada por

$$u_2^\epsilon(x, t) = u^0(x, t) + \epsilon u_1(x, y, t) + \epsilon^2 u_2(x, y, t), \quad y = \epsilon^{-1}x. \quad (5.22)$$

Apresentamos abaixo o teorema mencionado e seu corolário.

Teorema 5.11 *Para cada $\epsilon > 0$, seja u^ϵ a solução (clássica) do seguinte problema*

$$\begin{cases} \rho^\epsilon u_t^\epsilon - \operatorname{div}(\mathcal{A}^\epsilon \nabla u^\epsilon) = 0, & x \in \mathbb{R}^m, t > 0, \\ u^\epsilon(x, 0) = \phi(x), & \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \end{cases} \quad (5.23)$$

onde $\rho^\epsilon = \rho(\epsilon^{-1}x)$ e $\rho(x)$ é uma função C^1 , positiva e periódica que satisfaz $\langle \rho \rangle = 1$; $\mathcal{A}^\epsilon = \mathcal{A}(\epsilon^{-1}x)$ onde $\mathcal{A}(x)$ é uma matriz $m \times m$ periódica (de mesmo período de ρ), uniformemente elíptica, cujos elementos são funções C^1 de x . Então

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} |u^\epsilon(x, t) - u^0(x, t)| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (5.24)$$

onde u_0 é a solução de

$$u_t^0 - \operatorname{div}(\mathcal{A}^0 \nabla u^0) = 0, \quad u^0(\cdot, 0) = \phi \quad (5.25)$$

e \mathcal{A}^0 é a matriz constante dada por (5.17).

Prova: A prova consiste em estudar a aproximação até segunda ordem para u^ϵ , dada por (5.22).

Primeiramente, definimos o operador

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots, m,$$

e observamos que o operador $\text{div}(\mathcal{A}^\epsilon \nabla)$ pode ser reescrito como

$$\text{div}(\mathcal{A}^\epsilon \nabla) = \frac{d}{dx_i} \left(a_{ij}(\epsilon^{-1}x) \frac{d}{dx_j} \right).$$

Desenvolvendo o lado direito da igualdade acima, obtemos

$$\text{div}(\mathcal{A}^\epsilon \nabla) = \epsilon^{-2} A_1 + \epsilon^{-1} A_2 + A_3,$$

onde

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \\ A_2 &= \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + a_{ij}(y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j}, \\ A_3 &= a_{ij}(y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Definindo o operador L_ϵ como

$$L_\epsilon = \rho^\epsilon \frac{\partial}{\partial t} - \text{div}(\mathcal{A}^\epsilon \nabla),$$

nós olhamos para a sua ação sobre u_2^ϵ :

$$\begin{aligned} -L_\epsilon u_2^\epsilon &= \left(-\rho(t) \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon^{-2} A_1 + \epsilon^{-1} A_2 + A_3 \right) (u^0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2) \\ &= \epsilon^{-1} (A_1 u_1 + A_2 u^0) + \left(-\rho(y) \frac{\partial u^0}{\partial t} + A_1 u_2 + A_3 u^0 + A_2 u_1 \right) + \\ &\quad + \epsilon \left(A_3 u_1 + A_2 u_2 - \rho(y) \frac{\partial u_1}{\partial t} - \epsilon \rho(y) \frac{\partial u_2}{\partial t} + \epsilon A_3 u_2 \right). \end{aligned} \tag{5.26}$$

Queremos determinar condições suficientes em u^0 , u_1 e u_2 para que $L_\epsilon u_2^\epsilon$ seja arbitrariamente pequeno.

Começamos igualando o termo que multiplica ϵ^{-1} a zero. Obtemos $A_1 u_1 + A_2 u^0 = 0$, ou seja

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} u_1(x, y, t) \right) = - \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial u^0(x, t)}{\partial x_j} \right).$$

Dado $u^0(x, t)$, vamos olhar para a igualdade acima como uma equação elíptica com incógnita u_1 e variável independente y . Portanto, o problema acima é periódico em y , enquanto x e t são considerados como parâmetros. Pondo $N_k(y)$, $k = 1, \dots, m$ como as soluções de (5.19), podemos tomar

$$u_1(x, y, t) = N_k(y) \frac{\partial u^0(x, t)}{\partial x_k} \quad (5.27)$$

como solução da equação acima.

Agora vamos igualar a zero o termo que multiplica ϵ^0 , obtendo assim um problema periódico para a incógnita u_2 e com variável independente y , dado por

$$\operatorname{div}_y(\nabla_y u_2(x, y, t)) = - \left(-\rho(y) \frac{\partial u^0(x, t)}{\partial t} + A_3(y) u_0(x, t) + A_2(y) u_1(x, y, t) \right). \quad (5.28)$$

Pela Proposição 5.9, a existência de uma solução u_2 para a equação acima depende da condição

$$\left\langle -\rho(y) \frac{\partial u^0}{\partial t} + A_3 u_0 + A_2 u_1 \right\rangle = 0. \quad (5.29)$$

Mas

$$A_3 u^0 = a_{ij}(y) \frac{\partial^2 u^0(x, t)}{\partial x_i \partial x_j}$$

e

$$\begin{aligned} \langle A_2 u_1 \rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right) \right\rangle + \left\langle a_{ij} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial y_j} \right\rangle \\ &= 0 + \left\langle a_{ij} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial y_j} \right\rangle \\ &= \left\langle a_{ij} \frac{\partial^3 N_k u^0}{\partial x_i \partial x_k \partial y_j} \right\rangle \\ &= \left\langle a_{ik} \frac{\partial N_j}{\partial y_k} \right\rangle \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_i \partial x_j}, \end{aligned}$$

onde na primeira igualdade substituímos a definição de A_2 ; na segunda, aplicamos o mesmo resultado contido na prova da Proposição 5.7, de que as derivadas de funções periódicas têm média zero; na terceira, substituímos (5.27) e, na quarta, apenas trocamos j por k .

Substituindo em (5.29), temos

$$\frac{\partial u^0}{\partial t} = \left\langle \rho \frac{\partial u^0}{\partial t} \right\rangle = \langle A_3 u_0 + A_2 u_1 \rangle = \left\langle a_{ij} + a_{ik} \frac{\partial N_j}{\partial y_k} \right\rangle \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij}^0 \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_i \partial x_j},$$

onde a última igualdade vem de (5.18). Portanto, u^0 deve satisfazer

$$\frac{\partial u^0}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathcal{A}^0 \nabla u^0) = 0.$$

Ponha então u^0 como solução da equação acima com condição inicial $u(\cdot, 0) = \phi$. Com u^0 , u_1 e u_2 dados acima, acabamos de construir a aproximação (5.22).

Usamos a desigualdade triangular para obter

$$\sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |u^\epsilon - u^0| \leq \sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |u^\epsilon - u_2^\epsilon| + \sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |u_2^\epsilon - u^0|,$$

e vamos tentar controlar cada termo separadamente.

O primeiro termo depende essencialmente de $|L_\epsilon u_2^\epsilon(x, t)|$ e de $|u^\epsilon(x, 0) - u_2^\epsilon(x, 0)|$. Isso vem do Corolário 6.9 do Apêndice 6.2 aplicado à função $u^\epsilon - u_2^\epsilon$ e do fato de que u^ϵ , sendo solução, satisfaz $L_\epsilon u^\epsilon = 0$:

$$\sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |u^\epsilon - u_2^\epsilon| \leq \sup_{\mathbb{R}^m} |u^\epsilon(x, 0) - u_2^\epsilon(x, 0)| + (\min \rho)^{-1} T \sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |L_\epsilon u_2^\epsilon(x, t)|. \quad (5.30)$$

O teorema está provado se mostramos que, dado $T > 0$, valem os limites abaixo, quando $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |u_2^\epsilon - u^0| \rightarrow 0 \quad (5.31)$$

$$\sup_{\mathbb{R}^m} |u^\epsilon(x, 0) - u_2^\epsilon(x, 0)| \rightarrow 0 \quad (5.32)$$

$$\sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |L_\epsilon u_2^\epsilon| = \sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |L_\epsilon(u_2^\epsilon - u^\epsilon)| \rightarrow 0. \quad (5.33)$$

Começemos por (5.31). É claro que u^0 e suas derivadas são limitados em $\mathbb{R}^m \times [0, T]$. Considerando que as funções $N_k(y)$ são periódicas e de classe C^1 , portanto limitadas, temos que u_1 , dado por (5.27), e u_2 , dado pela única solução de (5.28) satisfazendo $\langle u_2 \rangle = 0$, são limitados em $\mathbb{R}^m \times [0, T]$. Segue então que u_2^ϵ , dada por (5.22), converge uniformemente em $\mathbb{R}^m \times [0, T]$ para u^0 quando $\epsilon \rightarrow 0$. O limite (5.32) é uma consequência direta de (5.31) pois $u^\epsilon(x, 0) = u^0(x, 0) = \phi(x)$. Para

obtermos (5.33), primeiro note que $L_\epsilon u_2^\epsilon$ é dado apenas pelo termo (5.26), uma vez que u^0 , u_1 e u_2 foram definidos de forma a anular os demais termos. Mas da mesma forma que u_1 e u_2 são limitados em $\mathbb{R}^m \times [0, T]$, também o são suas derivadas com respeito a x , y e t , de forma que $L_\epsilon u_2^\epsilon$ converge uniformemente para zero em $\mathbb{R}^m \times [0, T]$. Observe que estamos nos baseando no fato de que a solução u_2 da equação elíptica (5.28), assim como suas primeiras derivadas, são uniformemente limitadas, uma vez que u_0 , sendo solução da equação do calor, também tem suas derivadas limitadas e u_1 é dado por (5.27).

Os limites acima, juntamente com a estimativa (5.30), resultam em

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |u^\epsilon - u^0| = 0.$$

Agora note que (5.24) é consequência direta deste último limite e a prova está concluída. \square

O corolário abaixo justifica o argumento formal utilizado no Capítulo 2.

Corolário 5.12 *Para cada $\epsilon > 0$, seja u^ϵ a solução clássica do seguinte problema*

$$\begin{cases} u_t^\epsilon = [1 + \mu g(\epsilon^{-1}x)]u_{xx}^\epsilon, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u^\epsilon(x, 0) = \phi(x), & \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \end{cases},$$

onde g é suave e periódica e μ satisfaz $[1 + \mu g(y)] > 0 \forall y \in \mathbb{R}$. Seja u^0 solução de

$$u_t^0 = \sigma u_{xx}^0, \quad u^0(\cdot, t = 0) = \phi, \quad (5.34)$$

onde $\sigma = \langle [1 + \mu g(y)]^{-1} \rangle^{-1}$. Então

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} |u^\epsilon(x, t) - u^0(x, t)| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.35)$$

Prova: Podemos reescrever a equação para u^ϵ na forma (5.23) com

$$\rho(y) = [1 + \mu g(y)]^{-1}$$

e $\mathcal{A}(x)$ constante igual a 1. Pelo Teorema 5.11, vale o limite (5.35) sendo u^0 a solução de

$$\langle \rho \rangle u_t^0 = u_{xx}^0, \quad u^0(\cdot, t = 0) = \phi.$$

Mas, pela definição de σ , temos $\langle \rho \rangle = \sigma^{-1}$, portanto u^0 é também a solução de (5.34) e não há mais nada a provar. \square

Capítulo 6

Apêndices

6.1 A transformada de Fourier

Neste apêndice vamos definir a transformada de Fourier e enunciar as suas propriedades que são utilizadas no Capítulo 2. As demonstrações dos resultados abaixo podem ser encontrados no livro de Iório [18]. Representamos por dx a medida de Lebesgue na reta.

Definição 6.1 (Transformada de Fourier) *Seja f um elemento de $L^1(\mathbb{R})$. Definimos a transformada de Fourier de f através da fórmula*

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}dx = \hat{f}(k). \quad (6.1)$$

$\mathcal{F}\{\cdot\}$ atua linearmente em $L^1(\mathbb{R})$ e além disso, para qualquer elemento $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}\{f(ax)\} = \frac{1}{|a|} \hat{f}(k/a). \quad (6.2)$$

Outra propriedade é que se $f \in L^1(\mathbb{R})$, então \hat{f} é contínua e limitada.

Para funções dentro da classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ¹, vale o seguinte resultado:

Teorema 6.2 *Se $f \in \mathcal{S}$ então $\hat{f} \in \mathcal{S}$ e*

$$\widehat{f'}(k) = -ik\hat{f}(k). \quad (6.3)$$

¹ $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / |x^m D^n f(x)| \leq M(m, n) \forall m, n \in \mathbb{N}\}$, onde $D^n f(x)$ denota a n -ésima derivada de f no ponto x .

Além disso, para quaisquer $f, g \in \mathcal{S}$:

$$(\hat{f}, \hat{g}) = 2\pi(f, g), \quad (6.4)$$

onde (\cdot, \cdot) denota o produto interno de $L^2(\mathbb{R})$. Em particular, para todo $f \in \mathcal{S}$,

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \|f\|_{L^2}. \quad (6.5)$$

Observação: Como \mathcal{S} é um subespaço denso em $L^2(\mathbb{R})$, a definição de \mathcal{F} , pode ser estendida ao espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ ainda satisfazendo a relação (6.5). A transformada inversa de Fourier está bem definida em $L^2(\mathbb{R})$ e a mesma é dada pela fórmula de inversão abaixo.

Teorema 6.3 (Transformada inversa de Fourier) Para todo $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, temos que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e, além disso:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \hat{f}(k) e^{ikx} dk, \quad (6.6)$$

o limite valendo em $L^2(\mathbb{R})$. Para uma subsequência $R_n \rightarrow \infty$ o limite também vale q.t.p.

Definição 6.4 (Convolução) Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Definimos a convolução de f com g pela integral

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)dy. \quad (6.7)$$

A convolução de duas funções f e g satisfaz às seguintes propriedades: $f * g = g * f$ e $(f * g) * h = f * (g * h)$. O teorema da convolução nos diz que:

Teorema 6.5 (Teorema de convolução) Para todo $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}\{f * g\}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k), \quad (6.8)$$

ou seja,

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\hat{g}\}(x) = (f * g)(x). \quad (6.9)$$

Para finalizar, lembremos que a distribuição gaussiana se transforma da seguinte maneira:

$$\mathcal{F}\left\{e^{\frac{-x^2}{4\sigma}}\right\} = \sqrt{4\sigma\pi} e^{-\sigma k^2}, \quad (6.10)$$

onde σ é uma constante estritamente positiva.

6.2 O princípio do máximo

Neste apêndice vamos estudar propriedades sobre o máximo de funções que satisfazem uma equação (ou melhor, uma inequação) diferencial dada por um operador parabólico, que consiste em tomarmos o divergente do produto de uma matriz uniformemente elíptica² pelo gradiente da função, subtraído de sua derivada no tempo. Trata-se de uma das várias formulações do conhecido *Princípio do Máximo* para equações diferenciais parabólicas.

Vamos enunciar o teorema abaixo sem no entanto demonstrá-lo³.

Teorema 6.6 *Seja $u : \mathbb{R}^m \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 satisfazendo a seguinte desigualdade*

$$L[u] = \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \left(b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} \leq 0$$

em $E_T = \mathbb{R}^m \times (0, T]$. Suponha que os coeficientes de L são contínuos e limitados e que a matriz (a_{ij}) é uniformemente elíptica.

Nessas condições, se a função u é limitada em $\overline{E_T}$ e $u(x, 0) \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}^m$ então $u(x, t) \geq 0 \ \forall \ (x, t) \in E_T$.

Corolário 6.7 *Seja $\rho : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ limitada de classe C^1 tal que $\inf_{\mathbb{R}^m} \rho(x) > 0$. Então o Teorema 6.6 continua válido se definimos*

$$L[u] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (6.11)$$

desde que os elementos da matriz (a_{ij}) sejam de classe C^1 e suas derivadas sejam limitadas.

Prova: Desenvolvendo a primeira parte de L obtemos

$$L[u] = \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial a_{ij}(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Definimos $\tilde{L}[u](x, t) = \rho(x)^{-1} L[u](x, t)$, cujos coeficientes ainda satisfazem as hipóteses do Teorema 5.11. O corolário segue então do fato de que $\tilde{L}[u] \leq 0 \Leftrightarrow L[u] \leq 0$. □

²Veja a *condição de elipticidade* definida na página 96.

³Uma versão mais geral desse teorema pode ser encontrada em [13], p. 43, *Theorem 9*.

Corolário 6.8 *Seja $u : \mathbb{R}^m \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $L[u] \geq 0$ em $E_T = \mathbb{R}^m \times (0, T]$ e u é limitada em $\overline{E_T}$, onde $L[\cdot]$ é definido por (6.11). Então*

$$\sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^m} u(x, 0).$$

Prova: Defina $v(x, t) = [\sup_{\mathbb{R}^m} u(x, 0)] - u(x, t)$. Claramente v é de classe C^2 e satisfaz $v(x, 0) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Além disso, $L[v] = -L[u] \leq 0$ e v é limitada em $\overline{E_T}$. Logo, $v(x, t) \geq 0$ em E_T . Substituindo, obtemos que $u(x, t) \leq [\sup_{\mathbb{R}^m} u(x, 0)]$ para todo par $(x, t) \in E_T$. \square

Corolário 6.9 *Seja $v : \mathbb{R}^m \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável e considere $L[\cdot]$ definido por (6.11). Então*

$$\sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |v(x, t)| \leq \sup_{\mathbb{R}^m} |v(x, 0)| + (\inf_{\mathbb{R}^m} \rho)^{-1} T \sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |L v(x, t)|.$$

Prova: Defina

$$u(x, t) = - \left((\inf \rho)^{-1} \sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |L v(x, t)| \right) t + v.$$

Segue que

$$\begin{aligned} Lu &= L \left[- \left((\inf \rho)^{-1} \sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |L v(x, t)| \right) t \right] + Lv \\ &= \frac{\rho}{\inf \rho} \sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |L v(x, t)| + Lv \\ &\geq \frac{\rho}{\inf \rho} \sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |L v(x, t)| - |Lv| \\ &\geq \sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |L v(x, t)| - |Lv| \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Do corolário anterior segue que

$$v(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^m} |v(x, 0)| + \left((\inf \rho)^{-1} \sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |L v(x, t)| \right) t$$

para todo $t \in [0, T]$. Aplicamos para $-v$ o resultado que acabamos de obter e concluimos que

$$|v(x, t)| \leq \sup_{\mathbb{R}^m} |v(x, 0)| + \left((\inf \rho)^{-1} \sup_{\mathbb{R}^m \times [0, T]} |L v(x, t)| \right) t$$

para todo $t \in [0, T]$. A estimativa desejada segue direto desta última. \square

Referências Bibliográficas

- [1] W. F. Ames. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Academic Press, 3^a edição, 1992.
- [2] A. Bensoussan, J. Lions, G. Papanicolaou. *Asymptotic Analysis of Periodic Structure*. North Holland, Amsterdam, 1978.
- [3] G. A. Braga, F. Furtado, J. M. Moreira, L. T. Rolla. Renormalization group analysis of nonlinear diffusion equations with time dependent diffusion coefficients. Artigo em preparação.
- [4] G. A. Braga, F. Furtado, J. M. Moreira, L. T. Rolla. Renormalization group analysis of nonlinear diffusion equations with periodic coefficients. *Multiscale Modeling and Simulation*, 1 (4), pp. 630–644, 2003.
- [5] G. A. Braga, J. M. Moreira, L. T. Rolla. Análise assintótica de soluções de EDP's via grupos de renormalização. Em *Atas do 57º Seminário Brasileiro de Análise*, pp. 213–280, 2003.
- [6] J. Bricmont, A. Kupiainen. Renormalizing partial differential equations. *Constructive Physics*, 446, pp. 83–115, 1995.
- [7] J. Bricmont, A. Kupiainen, G. Lin. Renormalization group and asymptotics of solutions of nonlinear parabolic equations. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 47, pp. 893–922, 1994.
- [8] L. Chen, N. Goldenfeld. Numerical renormalization group calculations for similarity solutions and travelling waves. *Physical Review E*, 51, pp. 5577–5581, 1995.
- [9] G. Dagan. *Flow and Transport in Porous Formations*. Springer-Verlag, New York, 1989.

- [10] C. R. de Oliveira. *Introdução à análise funcional*. Publicações Matemáticas. IMPA, Rio de Janeiro, 2001.
- [11] G. Duro, E. Zuazua. Large time behavior for convection-diffusion equations in \mathbb{R}^n with periodic coefficients. *Journal of Differential Equations*, 167, pp. 275–315, 2000.
- [12] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 de *Graduate Studies in Mathematics*. AMS, 1998.
- [13] A. Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Krieger, 1983.
- [14] F. Furtado, J. Glimm, B. Lindquist, F. Pereira. Multi-length scale calculations of mixing length growth in tracer floods. Em F. Kovarik, editor, *Proc. of the Emerging Technologies Conference*, pp. 251–259. Institute for Improved Oil Recovery, University of Houston, Houston TX, 1990.
- [15] J. Glimm, B. Lindquist, F. Pereira, Q. Zhang. A theory of macrodispersion for the scale up problem. *Transport in Porous Media*, 13, pp. 97–122, 1993.
- [16] N. Goldenfeld. *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*. Addison-Wesley, Reading, 1992.
- [17] D. Halliday, R. Resnick, K. S. Krane. *Physics*. John Wiley, 5ª edição, 2000.
- [18] R. Iório Jr., V. M. Iório. *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*. IMPA, Rio de Janeiro, 1988.
- [19] V. Isaia. *Intermediate Asymptotic Behavior of Nonlinear Parabolic PDEs via a Renormalization Group Approach: a Numerical Study*. Tese de doutorado, Department of Mathematics, University of Wyoming, Laramie, Wyoming, 2002.
- [20] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleinik. *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*. Springer Verlag, Berlin, 1994.
- [21] R. J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Boston, 2ª edição, 1992.

- [22] J. M. Moreira. *O Comportamento Assintótico de Soluções da Equação do Calor não-Linear Via Grupos de Renormalização*. Tese de mestrado, UFMG, Belo Horizonte, Minas Gerais, 2002.
- [23] A. Naddaf, T. Spencer. On homogenization and scaling limit of some gradient perturbations of a massless free field. *Comm. Math. Phys.*, 183, pp. 55–84, 1997.
- [24] G. Papanicolaou. Diffusion in random media. *Surveys in Applied Mathematics*, pp. 205–255, 1995.
- [25] D. W. Peaceman. *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*. Elsevier, New York, 1977.
- [26] L. Tartar. Homogénéisation. Cours Pecout ou College de France, 1977.

Errata

Esta errata contém os erros encontrados até 08/05/2006.

Pede-se comunicar quaisquer outros erros matemáticos, tipográficos ou gramaticais através do endereço eletrônico leorolla@impa.br.

- Página 80. Na equação (4.11) deve-se ler

$$\ln A_n \approx \ln \left[\frac{A}{(\ln L)^\alpha} \right] - \alpha \ln n.$$